Résolution de problèmes de recherche opérationnelle par l'approche des flots sur les variétés

Guillaume Bouleux

Univ. Lyon, UJM-Saint Etienne, INSA-Lyon, DISP, EA 4570, F-69100 Villeurbanne, France

guillaume.bouleux@insa-lyon.fr

Mots-clés : *recherche opérationnelle, optimisation, système dynamique, variété, mécanique statistique*

1 Introduction

Le problème du voyageur de commerce est un problème NP-complet extrêmement connu et qui suscite un intérêt majeur depuis des décennies. Ce problème d'optimisation apparaît dans de nombreux champs d'application comme pour la construction de cartes du génome, la gestion des télescopes, les tournées d'infirmières, etc. Dû à sa grande complexité, de nombreuses heuristiques ont été proposées par le passé. Une grande difficulté rencontrée pour la résolution de ce type de problème réside dans le caractère discret de l'optimisation. Or, il en existe des approches qui proposent une relaxation continue du problème discret sous l'angle des systèmes dynamiques.

Ainsi, le problème d'optimisation peut être abordé sous l'angle des travaux précurseurs de R. Brockett [3], d' A. Bloch [1] puis de W. Wong [6] qui tous formalisent le problème du Traveling Salesman Problem (TSP) sous sa forme matricielle

$$P_{opt} = \arg\min_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{Trace}\left(D^T P^T A P\right) \tag{1}$$

où la matrice D est la matrice de distance entre les villes, la matrice A, la matrice d'adjacence du graphe complet associé au problème et où P est la matrice de permutation des villes. Ainsi la recherche de la solution du problème est déportée à la recherche d'une matrice de permutation P dans l'espace des matrices de permutation ou en concordance, dans l'espace des matrices de rotation SO(n).

2 L'approche par système dynamique et flot de gradient

La première piste explorée consiste à intégrer les matrices de permutation dans l'espace des matrices doublement stochastiques. Les avantages, dans ce cas, découlent du fait que les matrices de permutation sont les points extrêmes de l'ensemble des matrices doublement stochastiques et l'ensemble des matrices doublement stochastiques est l'enveloppe convexe de l'ensemble des matrices de permutation [4]. Bien entendu, SO(n) n'est pas un polytope et n'a pas de sommets. Il s'agit cependant d'un groupe contenant l'ensemble des matrices de permutation de déterminant 1 comme sous-ensemble et sous-groupe. C'est aussi une variété compacte sans bord et les flux de gradients dans cette variété ont toujours au moins un point stationnaire stable. L'analogie avec les systèmes dynamiques provient de la recherche même de P sur cette variété. En effet, on a facilement que

$$\dot{P} = -\nabla f(P) \tag{2}$$

avec $f(P) = \text{Trace}\left(D^T P^T A P\right)$ et $\dot{P} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{k+1}-P_k}{t}$ qui constitue bien un système dynamique, un flot sur la variété SO(n).

Quelques travaux ont abordé cette approche, tout d'abords pour le "*graph matching problem*" [7] puis pour la résolution du problème de TSP avec une heuristique de 2-opt [5].

3 Vers la mécanique statistique

Outre les aspects de recherche de matrice de permutation par double crochet de Lie comme énoncé par R. Brockett dans ses différents travaux, des résultats un peu plus récents d'A. Bloch et notamment ceux de [2] sont extrêmement pertinents. Dans ce travail A. Bloch fait une jointure entre le flot de gradient défini par un double crochet de Lie et les équations d'un système de Toda. Le système de Toda est un système hamiltonien qui modélise le mouvement de n particules ayant une interaction exponentielle en fonction des distances les caractérisants sur un axe. Le hamiltonien est connu et s'écrit

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{x_k - x_{k+1}}. \tag{3}$$

Or il est montré que par le changement de variable de Flaschka, le flot défini par le double crochet de poisson devient un flot de Lax dont les coefficients respectent la relation

$$\dot{L} = [B, L] = BL - LB \tag{4}$$

où L, B sont des matrices issues du changement de variable et [ ] le commutateur. Si $L \in$ SO(n) alors le système est complètement solvable. Ce formalisme permet d'être une passerelle importante avec les orbites co-adjointes des matrices de Lax L et donc nos matrices de permutations sous l'hypothèse que $P \in$ SO(n). En particulier on retrouve le polytope.

Références

[1] A. M. Bloch. "Steepest descent, linear programming, and Hamiltonian flows". In : 1990, p. 77-88. doi : 10.1090/conm/114/1097866.

[2] Anthony M. Bloch, François Gay-Balmaz et Tudor S. Ratiu. "Double bracket flows, toda flows and rigid body toda". In : *2013 51st Annu. Allert. Conf. Commun. Control. Comput. Allert. 2013* (2013), p. 1567-1572. doi : 10.1109/Allerton.2013.6736714.

[3] R. W. Brockett. "Dynamical systems that sort lists, diagonalize matrices, and solve linear programming problems". In : *Linear Algebra Appl.* 146.C (1991), p. 79-91. issn : 00243795. doi : 10.1016/0024-3795(91)90021-N.

[4] Roger W. Brockett et Wing Shing Wong. "A Gradient Flow for the Assignment Problem". In : *New Trends Syst. Theory*. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1991, p. 170-177. doi : 10.1007/978-1-4612-0439-8_20. url : http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0439-8%7B%5C_%7D20.

[5] Tuhin Sahai et al. "Continuous relaxations for the traveling salesman problem". In : *Nonlinear Dyn.* 97.4 (2019), p. 2003-2022. issn : 1573269X. doi : 10.1007/s11071-019-05092-5. arXiv : 1702.05224. url : https://doi.org/10.1007/s11071-019-05092-5.

[6] W. S. Wong. "Matrix representation and gradient flows for NP-hard problems". In : *J. Optim. Theory Appl.* 87.1 (1995), p. 197-220. issn : 00223239. doi : 10.1007/BF02192047.

[7] Michael M. Zavlanos et George J. Pappas. "A dynamical systems approach to weighted graph matching". In : *Automatica* 44.11 (2008), p. 2817-2824. issn : 00051098. doi : 10.1016/j.automatica.2008.04.009. url : http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2008.04.009.