Une nouvelle méthode exacte pour la résolution du problème de transport à trois indices avec la sommation sur un indice dans le cas de dégénérescence

Hoa Pham, Fabien Escande, Laurent Klupinski

Département R&D et Supply Chain, Groupe Selecom, ZI Brézet, 63050 Clermont Ferrand, France
{h.pham, f.escande, l.klupinski}@selecom.com

Mots-clés *: problème de transport à trois indices (PT3I), dégénérescence, condition d'existence de la solution (CES).*

1 Introduction

Dans cet article, nous présentons le problème de transport à trois indices (PT3I), un des problèmes de transport le plus adapté à la circonstance réelle, qui est explicitement l'origine, la destination, le type de marchandises ou le type de moyens de transport.

Une partie du problème de transport à trois indices avec la sommation sur un indice (PT3I-1) a été résolue [1,2]. Cependant, cette publication restait encore limitée avec deux résultats principaux : premièrement, proposer la condition nécessaire et la condition suffisante pour que le problème ait la solution, et deuxièmement, la méthode de résolution du PT3I-1 non dégénéré dans le cas il existe une solution à ce problème.

En faisant une extension vers cette recherche, nous proposons la condition d'existence de la solution (CES) du PT3I-1 en démontrant que la condition nécessaire que P.X.Ninh a trouvée [1] est aussi la condition suffisante. Basé sur ce résultat, nous proposons une méthode exacte pour résoudre le PI3I-1 dans le cas de dégénérescence.

2 Présentation du problème

2.1 Problème PI3I-1

Il y a m origines $O_i\ i = 1, \dots, m$; n destinations $D_j\ j = 1, \dots, n$; p types de marchandises $H_k\ k = 1, \dots, p$

La quantité de marchandises du type k à l'origine O_i (ou la quantité de marchandises à l'origine 0_i transportées par le type de transport k) est α_{ik}

La quantité de marchandises du type k transportées à la destination D_j (ou la quantité de marchandises transportées à la destination D_j par le type de transport k) est β_{jk}

La quantité totale de tous les types de marchandises (ou la quantité de marchandises transportées par tous les types de moyens de transport) de l'origine O_i à la destination D_j est γ_{ij}

c_{ijk} est le coût de transport unitaire pour transporter une unité de marchandises du type k de l'origine O_i à la destination D_j

x_{ijk} est la quantité de marchandises du type k transportées de l'origine O_i à la destination D_j

Le problème posé : Déterminer les variables x_{ijk} $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, k = 1 \dots p$ pour

$$Min\, L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ijk} x_{ijk} \quad (1)$$

Et répondre aux contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = \alpha_{ik} \;\; i = 1 \dots m, k = 1 \dots p \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = \beta_{jk} \;\; j = 1 \dots n, k = 1 \dots p \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = \gamma_{ij} \;\; i = 1 \dots m, j = 1 \dots n \quad (4)$$

Le problème a *m.n.p* variables et le système des conditions a *mp+np+mn* équations.

Le système des conditions se divise en 3 groupes en fonction des indices *ik*, *jk*, *ij*.

P_{ijk} est le vecteur coefficient de la variable x_{ijk}, un vecteur colonne se compose de *mp+np+mn* coordonnées parmi lesquelles il y a 3 chiffres 1 aux lignes correspondantes à $\alpha_{ik}, \beta_{jk}, \gamma_{ij}$, les autres coordonnées sont égales à 0.

2.2 Proposition de la CES et d'une méthode exacte (cas de dégénérescence)

Basé sur la condition nécessaire du PT3I-1 [1], nous proposons un théorème.

Théorème 1 *La condition nécessaire et suffisante pour le problème (1)…(4) ait la solution :*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \beta_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \;\; i = 1 \dots m \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} \;\; j = 1 \dots n \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \;\; k = 1 \dots p \quad (8)$$

Supposons que l'on trouve une solution ayant *(mp+np+mn-m-n-p+1)* variables positives. C'est le cas non dégénéré et le PI3I-1 dans ce cas a été résolu en 1980. Au contraire, si on rencontre une solution ayant moins de *(mp+np+mn-m-n-p+1)* variables positives, on tombe dans le cas dégénéré. Il nous faut éliminer la dégénérescence pour vérifier l'optimalité de la solution obtenue. Nous proposons une méthode pratique pour éliminer la dégénérescence dans deux cas :

- Cas 1 : La dégénérescence apparaît dans le processus d'élaboration de la première solution
- Cas 2 : La dégénérescence apparaît dans le processus d'amélioration des solutions (transformation de l'une solution en l'autre meilleure solution)

Après avoir éliminé la dégénérescence, nous utilisons l'algorithme du PT3I-1 dans le cas non dégénéré pour continuer à résoudre ce problème. Ainsi, le problème de transport à trois indices avec la sommation sur un indice est entièrement résolu dans tous les cas.

3 Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons trouvé la condition d'existence de la solution CES, un critère obligatoire et extrêmement important pour la recherche de la solution optimale du PT3I-1. Nous avons aussi proposé un algorithme pour résoudre ce problème dans tous les cas, dégénéré ainsi que non dégénéré. Basé sur cet algorithme, nous développerons un programme en langage Fortran95 dans une espace non symétrique et continuerons à résoudre le PT3I pour les autres cas particuliers.

Références

[1] P.X. Ninh "Multi-index transportation problem", PhD. Thesis, Hanoi University of Science and Technology, Vietnam, 1980.

[2] T.H. Pham, P. Dott "An exact method for solving the four index transportation problem and industrial application", American Journal on Operational Research, vol.3(2), pp.28-44, 2013.