# Une formulation bi-niveaux pour un problem d'expansion de réseau stochastique avec contrainte de fiabilité

Xavier Blanchot[1,2], François Clautiaux[1], Aurélien Froger[1], Manuel Ruiz[2]

[1] Université de Bordeaux, UMR CNRS 5251, Inria Bordeaux Sud-Ouest, Talence, France
xavier.blanchot@u-bordeaux.fr,
{francois.clautiaux,aurelien.froger}@math.u-bordeaux.fr

[2] RTE, Paris La Défense, France
{xavier.blanchot,manuel.ruiz}@rte-france.com

**Mots-clés** : *programmation bi-niveaux, expansion de réseau*

## 1 Contexte industriel

Dans ce travail, nous présentons la prise en compte d'une contrainte de fiabilité dans des problèmes d'expansion de réseau stochastiques utilisés dans les études long terme d'équilibre offre-demande effectuées par RTE, le gestionnaire de réseau de transport d'électricité français. Les études d'équilibre offre-demande long terme ont pour but d'analyser le risque de déséquilibre entre la capacité de production et la demande en électricité à des horizons allant de 15 à 30 ans. A travers ces études, RTE propose des investissement en capacité de production ou de transport sur le réseau pour faire face à ce risque de déséquilibre.

On peut modéliser cela à l'aide d'un problème d'expansion de réseau stochastique à deux étapes. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de scénarios associés à des probabilités $(p_s)_{s\in\mathcal{S}}$, $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ un graphe modélisant le réseau et $\mathcal{T}$ un ensemble de pas de temps. On note $x$ les variables de premier niveau modélisant les investissements possibles sur le réseau, et $\phi(x, s)$ le coût du problème opérationnel, pour un scénario $s \in \mathcal{S}$ et une décision de premier niveau $x$ donnés. Le problème d'expansion de réseau stochastique peut alors être formulé comme suit :

$$\begin{cases} min\ c^T x + \sum_{s\in\mathcal{S}} p_s \phi(x, s) \\ s.t.\ Ax = b \\ \qquad x \in \mathbb{R}^{n_{1,C}} \times \mathbb{N}^{n_{1,I}} \end{cases}$$

Le problème opérationnel modélise un équilibrage optimal entre la production et la demande en électricité sur le réseau :

$$\phi(x, s) = \begin{cases} min\ g_s^T y_s + M e^T u_s \\ s.t.\ W_s y_s + Q_s u_s = d_s - T_s x \\ \qquad y_s \in \mathbb{R}^{n_2}, u_s \in \mathbb{R}^{Card(\mathcal{N})\times Card(\mathcal{T})} \end{cases}$$

où les variables $u_s \in \mathbb{R}^{Card(\mathcal{N})\times Card(\mathcal{T})}$ comptent, pour chaque nœud du graphe et chaque pas de temps, la quantité d'énergie non fournie. Les variables $y_s$ représentent toutes les autres variables de second niveau (production, flots, ...), $M$ est le coût unitaire associé à une demande non satisfaite, et $e$ est un vecteur de 1.

## 2 Contrainte de fiabilité et formulation bi-niveaux

Le coût unitaire associé à une demande non satisfaite dans les formulations utilisées est fixé par l'état à 20.000€\ MWh. Il est possible que ce coût ne soit pas assez haut pour générer des solutions dans lesquelles les demandes à tous les nœuds et tous les pas de temps de tous les scénarios soient satisfaites. Pour assurer la fiabilité du réseau, la législation impose de ne pas avoir plus d'une certaine constante $\alpha$ de demandes non satisfaites sur l'ensemble des nœuds et des pas de temps, en moyenne sur l'ensemble des scénarios. Cette contrainte couple les scénarios entre eux. Cependant, la solution du problème opérationnel doit être indépendante des autres scénarios et ne peut pas être sous-optimale du fait de la relation entre les scénarios causée par la contrainte de fiabilité. Cela conduit à une formulation bi-niveaux en variables mixtes, dans laquelle la contrainte de fiabilité apparait dans le niveau haut.

On note $\delta \in \{0,1\}^{Card(\mathcal{S})\times Card(\mathcal{N})\times Card(\mathcal{T})}$ le vecteur de variables binaires qui représente si une demande est satisfaite ou non à chaque nœud et chaque pas de temps, pour chaque scénario. On note $\alpha$ le nombre maximum de demandes non satisfaites imposé par la législation, $R$ une constante suffisamment grande, et $\epsilon$ un seuil à partir duquel une demande est considérée comme non satisfaite. Le problème d'expansion de réseau stochastique avec contrainte de fiabilité peut être modélisé comme suit :

$$\begin{cases} min\ c^T x + \sum_{s\in S} p_s(g_s^T y_s + Me^T u_s) \\ \quad s.t.\ Ax = b \\ \qquad \delta_{s,n,t} \leq \frac{1}{\epsilon} u_{s,n,t}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T} \\ \qquad R\delta_{s,n,t} \geq u_{s,n,t} - \epsilon, \forall s \in \mathcal{S}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T} \\ \qquad \sum_{s\in\mathcal{S}} p_s \sum_{n\in\mathcal{N}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \delta_{s,n,t} \leq \alpha \\ \qquad (y_s, u_s) \in \operatorname{Arg\,min}\{g_s^T y'_s + Me^T u'_s : W_s y'_s + Q_s u'_s + T_s x = d_s\}, \forall s \in \mathcal{S} \\ \qquad \delta \in \{0,1\}^{Card(\mathcal{S})\times Card(\mathcal{N})\times Card(\mathcal{T})} \\ \qquad x \in \mathbb{R}^{n_{1,C}} \times \mathbb{N}^{n_{1,I}}, y \in \mathbb{R}^{n_2 \times Card(\mathcal{S})}, u \in \mathbb{R}^{Card(\mathcal{N})\times Card(\mathcal{T})\times Card(\mathcal{S})} \end{cases}$$

# 3 Algorithme proposé

De nombreux algorithmes pour les problèmes bi-niveaux en variables mixtes nécessitent certaines hypothèses sur la structure du problème, comme la présence uniquement de variables entière couplantes [1], ou l'absence de contrainte dans le niveau haut faisant intervenir des variables du niveau bas. Nous proposons une heuristique basée sur la relaxation de la contrainte de fiabilité, et une recherche dichotomique sur les coût d'investissements. Pour une borne donnée sur les coûts d'investissements $c^T x \geq \Lambda$, le problème peut être résolu efficacement à l'aide de la décomposition de Benders du fait de la relaxation des contraintes de niveau haut. De plus, comme les coupes de Benders sont valides sur l'intégralité du domaine réalisable des variables $x$, la décomposition de Benders peut bénéficier d'un démarrage à chaud à chaque itération de l'heuristique pour en accélérer la convergence. Nous comparons les résultats de l'algorithme proposé, en temps de calcul et qualité des solutions, avec la reformulation KKT du problème introduite dans [2], et sa résolution à l'aide de SOS1 [3].

# Références


[1] Matteo Fischetti, Ivana Ljubić, Michele Monaci, and Markus Sinnl. On the use of intersection cuts for bilevel optimization. *Mathematical Programming*, 172(1) :77–103, November 2018.

[2] José Fortuny-Amat and Bruce McCarl. A Representation and Economic Interpretation of a Two-Level Programming Problem. *Journal of the Operational Research Society*, 32(9) :783–792, September 1981.

[3] S. Siddiqui and S. A. Gabriel. An SOS1-Based Approach for Solving MPECs with a Natural Gas Market Application. *Networks and Spatial Economics*, 13(2) :205–227, June 2013.