# Heuristiques de linéarisation par morceaux de fonctions à deux variables avec minimisation du nombre de morceaux sous contrainte de tolérance

Aloïs Duguet Sandra Ulrich Ngueveu

LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INP, Toulouse, France

aduguet@laas.fr

## 1 Description du problème

Le problème traité consiste à approximer une fonction continue non linéaire $f : [A, B] \times [C, D] \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par une fonction linéaire par morceaux (piecewise linear, PWL) $g$, en minimisant le nombre de morceaux composant $g$ et en garantissant le respect de la contrainte $g(x) \in [f(x) - \delta, f(x) + \delta] \quad \forall x \in [A, B] \times [C, D]$. On note ce problème $(\mathcal{P})$.

Une application de $(\mathcal{P})$ est l'approximation d'un Mixed-Integer Non Linear Program (MINLP), dont les termes non linéaires sont à deux variables, par un programme linéaire en nombres entiers (PLNE), tout en garantissant le respect d'une borne prédéfinie sur l'erreur d'approximation.

## 2 Etat de l'art

Les fonctions PWL sont couramment utilisées pour approximer des problèmes d'optimisation contenant des termes non linéaires en PLNE. Par exemple, un problème avec une fonction objectif non linéaire et des contraintes linéaires s'approxime en PLNE en remplaçant uniquement la fonction objectif par une fonction PWL [5]. Pour le cas à $m = 2$ variables, [2] donne et compare empiriquement 3 formulations différentes. Bien entendu, en faisant l'approximation par une fonction PWL d'une fonction non linéaire, plus la fonction PWL est "proche" de la fonction non linéaire, meilleure est l'approximation, mais aussi moins il y a de morceaux dans la fonction PWL, moins le PLNE résultant possède de variables binaires et de contraintes, accélérant en général sa résolution. Ces deux points sont difficiles à prendre en compte et ne sont pas traités dans [2]. Pour le problème que nous étudions, il existe actuellement un résultat sur le cas particulier de la norme euclidienne [1] et deux heuristiques valables pour toutes les fonctions continues à deux variables [4; 3].

## 3 Intérêt de la méthode proposée

Dans [4], deux heuristiques produisant une fonction PWL continue sont proposées. Une heuristique se base sur la décomposition de la fonction en somme de fonctions à une variable puis sur la résolution exacte des deux problèmes univariés résultants (Reb1D), tandis qu'une autre (Reb2D), subdivise $[A, B] \times [C, D]$ en triangle de plus en plus petit récursivement jusqu'à ce qu'une fonction linéaire définie sur ces triangles respecte la contrainte d'erreur d'approximation ; la vérification de la satisfaction de la contrainte étant faite par la résolution de problèmes non linéaires (NLP). Dans [3], des polygones sont utilisés pour construire une fonction PWL continue qui est la différence de deux fonctions PWL convexe, et l'heuristique résout plusieurs PLNE et plusieurs NLP par itération. Dans ce travail, un cadre pour la définition d'heuristiques gloutonnes de construction des fonctions PWL de ce problème est proposé, basé sur l'idée de sélectionner chaque morceau de la fonction PWL en construction en maximisant son extension dans une direction. La fonction approximée doit être $\mathcal{C}^1$. De plus, les fonctions PWL produites ne sont pas nécessairement continues contrairement aux heuristiques existantes ce qui réduit les contraintes à satisfaire. Une restriction de la contrainte à $g(x) \in [f^-_{PWL}, f^+_{PWL}] \subset [f(x) - \delta, f(x) + \delta] \quad \forall x \in [A, B] \times [C, D]$ avec $f^-_{PWL}$ et $f^+_{PWL}$ des fonctions PWL permet de ne résoudre que des problèmes linéaires (PL). Ce cadre permet de produire efficacement plusieurs heuristiques, correspondant à des choix différents pour certains points-clefs de la méthode globale.

# 4 Aperçu des résultats

On appelle **Kazda** la méthode décrite dans [3]. Enfin, on appelle 2 de nos heuristiques **Heur1** et **Heur2**.

| fonction | $\delta$ | $D$ | Reb1D | Reb2D | Kazda | Heur1 | Heur2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + y^2$ | 1 | $[0.5, 7.5] \times [0.5, 3.5]$ | 8 | 24 | **6** | 10 | 10 |
| $x^2 + y^2$ | 0.1 | $[0.5, 7.5] \times [0.5, 3.5]$ | **60** | 351 | Time-Out | 122 | 119 |
| $xy$ | 1 | $[2, 8] \times [2, 4]$ | 6 | 4 | 4 | **3** | **3** |
| $xy$ | 0.25 | $[2, 8] \times [2, 4]$ | 18 | 20 | 12 | 12 | **11** |
| $xy$ | 0.05 | $[2, 8] \times [2, 4]$ | 98 | 94 | Time-Out | 67 | **57** |
| $x \sin(x) \sin(y)$ | 1 | $[0.05, 3.1] \times [0.05, 3.1]$ | 20 | 6 | **1** | **1** | **1** |
| $x \sin(x) \sin(y)$ | 0.05 | $[0.05, 3.1] \times [0.05, 3.1]$ | 340 | 274 | Time-Out | 59 | **55** |
| $\exp(-10(x^2 - y^2)^2)$ | 1 | $[1, 2] \times [1, 2]$ | 3 | 2 | **1** | **1** | **1** |
| $\exp(-10(x^2 - y^2)^2)$ | 0.1 | $[1, 2] \times [1, 2]$ | 18 | 84 | **5** | 18 | 16 |
| $\exp(-10(x^2 - y^2)^2)$ | 0.05 | $[1, 2] \times [1, 2]$ | **34** | 86 | Time-Out | 41 | Time-Out |

TAB. 1 – Nombre de morceaux constituant la fonction PWL satisfaisant les contraintes d'approximation de la fonction à $\delta$ près sur le domaine $D$ pour différents algorithmes

Les Time-Out correspondent pour Kazda à un temps plus grand que 3600 secondes pour résoudre un problème de PLNE, tandis que pour Heur2 cela correpond à un temps d'exécution global dépassant 2 heures.

# Références


[1] A. Duguet, C. Artigues, L. Houssin, and S. U. Ngueveu. Properties, extensions and application of piecewise linearization for euclidean norm optimization in the plane. Technical report, LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, UPS, INP, Toulouse, France, 2021.

[2] C. D'Ambrosio, A. Lodi, and S. Martello. Piecewise linear approximation of functions of two variables in MILP models. *Operations Research Letters*, 38(1) :39–46, 2010. doi : https ://doi.org/10.1016/j.orl.2009.09.005.

[3] K. Kazda and X. Li. Nonconvex multivariate piecewise-linear fitting using the difference-of-convex representation. *Computers & Chemical Engineering*, 150 :107310, 2021. doi : https ://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2021.107310.

[4] S. Rebennack and J. Kallrath. Continuous piecewise linear delta-approximations for bivariate and multivariate functions. *J Optim Theory Appl*, 167 :102–117, 2015.

[5] H. Zhang and S. Wang. Linearly constrained global optimization via piecewise-linear approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214(1) :111–120, 2008. doi : https ://doi.org/10.1016/j.cam.2007.02.006.