

# Étude de formulations étendues pour le problème de l'arbre couvrant budgété

Charles Nourry<sup>1</sup>, A. Ridha Mahjoub<sup>1</sup>, Hassène Aissi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire LAMSADE, UMR CNRS 7024, Université Paris-Dauphine  
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France

`charles.nourry@dauphine.psl.eu`

`{ridha.mahjoub,hassan.aissi}@lamsade.dauphine.fr`

**Mots-clés** : *optimisation combinatoire, approches polyédrales, formulation étendue, inégalité valide, théorie des graphes.*

## 1 Introduction

Dans ces travaux de thèse, nous nous intéressons à la résolution exacte de certains problèmes de conception de réseaux sujet à plusieurs contraintes de budgets. Nous abordons ces problèmes avec une approche basée sur la programmation mathématique. Ces contraintes de budgets vont venir modifier la structure des polyèdres, plus ou moins connus, associés aux problèmes de réseaux. L'objectif principal de notre travail est de comprendre ces nouvelles descriptions, trouver des formulations étendues ainsi que des inégalités valides et facettes afin de concevoir des algorithmes de branchements efficaces pour résoudre ces problèmes de réseaux budgétés. Considérons le problème de l'arbre couvrant budgété de poids minimum, qui a été montré comme étant faiblement NP-difficile par [1] dès lors que l'on considère le problème avec une contrainte de ressource. Ce problème possède de multiples applications, dans la pratique avec par exemple le domaine de la télécommunication, on peut également le retrouver comme sous-problème de certaines décompositions.

## 2 Description du problème

Considérons un graphe  $G = (V, E)$ , chaque arête  $e \in E$  est associé à un vecteur  $(c^1, \dots, c^k) \in \mathbb{Q}^k$ , où  $k \in \mathbb{N}$  est fixé. De plus, nous disposons de  $k - 1$  budgets associés pour chaque ressource  $1, \dots, k - 1$ , la dernière ressource  $k$  va constituer les coefficients de la fonction objectif. Plusieurs approches ont été utilisées pour résoudre ce problème, notamment des algorithmes d'approximations comme [3, 4]. Des cas particuliers de ce problème ont également été traités dans la littérature comme l'arbre couvrant avec contraintes de degré.

Nous nous intéressons aux approches polyédrales, avec par exemple la formulation suivante basée sur les contraintes de sous-tours. Dans cette formulation, on associe à chaque arête  $e \in E$  une variable binaire  $x_e$  (où  $x_e = 1$  signifie que l'arête appartient à la solution, et  $x_e = 0$  signifie que l'arête n'appartient pas à la solution), on considère le programme linéaire en nombre entier suivant :

$$\begin{aligned}
\min \sum_{e \in E} c_e^k \cdot x_e \\
s.t. \sum_{e \in E(S)} x_e &\leq |S| - 1 && \forall S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq |V| - 1 && (1) \\
\sum_{e \in E} x_e &= |V| - 1 && && (2) \\
\sum_{e \in E} c_e^i \cdot x_e &\leq b^i && i = 1, \dots, k - 1 && (3) \\
x_e &\in \{0, 1\} && \forall e \in E && (4)
\end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous avons étudié différentes propriétés polyédrales du problème ; cas particuliers, relaxation, premières idées d'inégalités valides et dimension du problème. Dans un second temps, nous analysons plusieurs formulations étendues, dont certaines basées sur des variations de formulations pour le problème de sac à dos, ainsi qu'une approche basée sur les matroïdes et les travaux de Balas sur la programmation disjonctive [2]. Ces formulations étendues ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients par rapport à la formulation des sous-tours données ci-dessus. Nous avons étudié les projections respectives des différentes formulations étendues sur l'ensemble des variables de design afin de trouver des patterns d'inégalités valides pour le problème de l'arbre couvrant budgeté. Pour cela, nous avons étudié les cônes de projections associés, et ainsi élaborer des algorithmes permettant de générer des rayons extrêmes et donc des inégalités valides pour notre problème.

Dans le cas particulier où l'on a une contrainte de budget, la formulation basée sur les matroïdes est entière et donc sa projection sur les variables de design l'est également. Ce résultat découle du théorème d'Edmonds selon lequel le polyèdre associé à l'intersection de deux matroïdes est entier, or le problème de l'arbre couvrant peut être décrit par le matroïde graphique. Plus généralement, cette formulation étendue s'étend aux cas où le système associé aux contraintes de ressources correspond à un matroïde. Dans la plupart des cas les contraintes de budgets ne correspondent pas à un matroïde. Cependant, en divisant le problème d'une certaine manière, il est possible de se retrouver avec un certains nombre de polyèdres associés à des intersections de matroïdes.

### 3 Conclusions et perspectives

L'étude de plusieurs formulations étendues nous à permis d'identifier différents patterns d'inégalités valides combinant la contrainte du sac à dos ainsi que la structure de l'arbre couvrant. Ces contraintes ont été intégrées dans des algorithmes de branchements afin de tester leurs efficacités dans la résolution du problème de l'arbre couvrant budgeté.

### Références

- [1] Aggarwal, Vijay and Aneja, Yash P and Nair, KPK. *Minimal spanning tree subject to a side constraint*. Computers & Operations Research, 9(4) :287–296, 1982.
- [2] Balas, Egon. Disjunctive programming. *Annals of discrete mathematics*, 5 :3–51, 1979.
- [3] Ravi, R., Goemans, M. X. The constrained minimum spanning tree problem. *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, (pp. 66-75), 1996.
- [4] Hassin, R., Levin, A. An efficient polynomial time approximation scheme for the constrained minimum spanning tree problem using matroid intersection. *SIAM Journal on Computing*, 33(2), 261-268, 2004.