Robustesse des distances et du diamètre dans un réseau fragile

Arnaud Casteigts[1], Timothée Corsini[1], Hervé Hocquard[1], Arnaud Labourel[2]

[1] Université de Bordeaux, LaBRI, France

{arnaud.casteigts,timothee.corsini,hocquard}@labri.fr

[2] LIS, Aix-Marseille, France arnaud.labourel@lis-lab.fr

La famille des graphes temporels $\mathcal{TC}^{\mathcal{R}}$ contient les graphes qui sont temporellement connexes infiniment souvent, c'est à dire que de manière récurrente, il existe toujours dans le futur un *chemin temporel* (un chemin qui emprunte les arêtes en temps croissant) entre chaque paire de noeuds dans le graphe. L'empreinte d'un graphe temporel est l'union de toutes les arêtes qui apparaissent au moins une fois pendant sa durée de vie (on suppose l'ensemble des sommets constants). L'empreinte *ultime* ne comporte que les arêtes qui ré-apparaissent de manière récurrente (ou restent présentes indéfiniment), c'est donc un sous-graphe de l'empreinte. Il se trouve que $\mathcal{TC}^{\mathcal{R}}$ correspond exactement aux graphes temporels dont l'empreinte ultime est connexe, un exemple de graphe $\mathcal{TC}^{\mathcal{R}}$ et son empreinte ulitme sont en Figure 1.

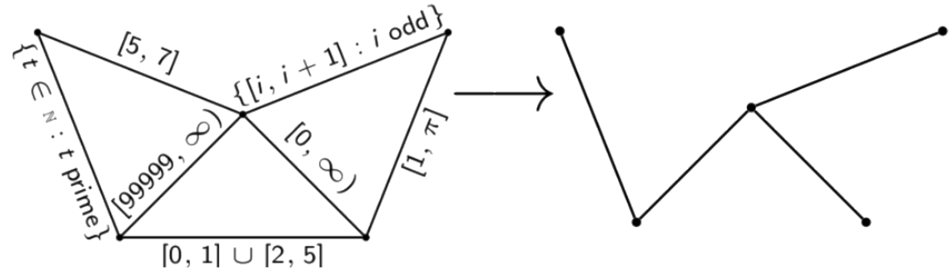

FIG. 1 – Un graphe temporel et son empreinte ultime.

Ainsi, si l'on connait l'empreinte H d'un graphe temporel $\mathcal{G}$ et que l'on a la garantie que $\mathcal{G} \in \mathcal{TC}^{\mathcal{R}}$, alors on sait que l'empreinte ultime sera un sous-graphe couvrant connexe de H. Par conséquent, si l'on sait que l'empreinte ultime est connexe, sans pour autant savoir à quel sous-graphe il va correspondre, on peut se demander quels types d'empreintes vont garantir que certaines propriétés sont conservées dans n'importe quelle empreinte ultime. Cette configuration motive alors une nouvelle notion d'hérédité dans les graphes, qui peut ensuite être interprétée soit temporellement (avec les empreintes), soit classiquement (dans les graphes standards) :

Définition 1 (Robustesse [1]) *Une propriété d'un graphe (standard) G est robuste si et seulement si elle est satisfaite dans tous les sous-graphes couvrants connexes de G.*

Après avoir rappelé ces différentes notions, nous allons présenter nos résultats sur le problème de décider si le diamètre d'un graphe donné est robuste, ainsi que le problème de décider si la distance entre deux sommets donnés dans un graphe est robuste, un exemple de graphe avec une distance non robuste est donné en Figure 2.

Le diamètre est important en algorithmique distribuée car il intervient souvent comme paramètre de complexité des algorithmes. Le fait qu'il soit robuste implique alors que la complexité ne se dégradera pas à mesure que le réseau se détériore (c.à.d. perd des liens définitivement), du moment qu'il reste connexe. Nous montrerons que le problème de décider si le diamètre d'un graphe est robuste est co-NP-complet. À l'inverse, décider si la distance entre deux sommets donnés est robuste peut se faire en temps linéaire en adaptant un algorithme de reconnaissance

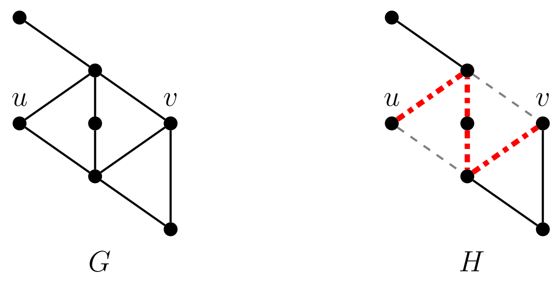

FIG. 2 – Un graphe G dont le diamètre est robuste mais pas la distance entre les sommets u et v, avec pour exemple de dégradation le sous graphe H après le retrait des arêtes grisées.

des graphes série-parallèle. Ce résultat repose, entre autres, sur une caractérisation des graphes série-parallèle via mineurs enracinés exclus.

Mots-clés : *Graphes temporels, Réseaux dynamiques, Connexité temporelle, Empreinte ultime, Chemin le plus long, Graphes série-parallèles, Mineurs enracinés.*

Références

[1] Arnaud Casteigts, Swan Dubois, Franck Petit, and John M Robson, *Robustness : A new form of heredity motivated by dynamic networks*, Theoretical Computer Science **806** (2020), 429–445.