Algorithmes quantiques pour le bi-partitionnement d'hypergraphes

Julien Rodriguez

Université Paris-Saclay, CEA, List, F-91120, Palaiseau
julien.rodriguez@cea.fr

Université de Bordeaux, INRIA
julien.rodriguez@inria.fr

Mots-clés : *recherche opérationnelle quantique, QAOA, Grover, partitionnement.*

1 Introduction

L'arrivée des machines quantiques risque de révolutionner de nombreux domaines, en particulier celui des algorithmes combinatoires. En effet, ces machines proposent plusieurs algorithmes d'optimisation, tels que, QAOA pour *"Quantum Approximate Optimization Algorithm"* [2], VQE pour *"Variational Quantum Eigensolver"* [5] ainsi que l'algorithme de recherche à partir d'un oracle publié par Lov Grover [3]. Ces algorithmes apportent chacun un gain théorique sur le temps de calcul pour certains problèmes combinatoires.

Cependant, à ce jour il existe plusieurs technologies différentes permettant de concevoir une puce quantique dont aucune n'est pour l'instant dominante. Dans ce travail nous nous intéressons aux machines appelées "machines à portes" et aux machines dites à "recuit quantique". Les exécutions pour les machines à portes sont réalisées sur les simulateurs et les machines d'IBM à l'aide de la bibliothèque Qiskit et de la bibliothèque Ocean de D-Wave pour les machines de type recuit quantique.

L'objectif est de proposer plusieurs modèles avec leurs circuits quantiques associés pour le problème de partitionnement d'hypergraphes et de mesurer la complexité en espace et en nombre de portes des différents algorithmes d'optimisation choisis.

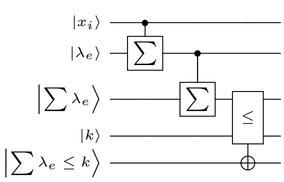
2 Partitionnement d'hypergraphe

Un hypergraphe est une extension de la notion de graphe dans lequel les hyperarêtes peuvent contenir plus de deux sommets. Le partitionnement d'un hypergraphe consiste à séparer les sommets en plusieurs sous-ensembles appelés parties, de taille similaire à +/- ϵ près, le tout en minimisant le nombre d'hyperarêtes entre les parties. Il existe plusieurs façon de mesurer la valeur d'une partition, comme le nombre d'hyperarêtes coupées ou la connectivité "moins un" : $\lambda_e - 1 = \sum_k \pi_k(e) - 1$, avec $\pi_k(e) = 1$ si et seulement si au moins un des sommets connecté à e est dans la partie k. Notons que dans le cas du bi-partitionnement, l'objectif $\lambda - 1$ compte exactement le nombre d'hyperarêtes coupées.

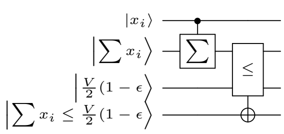
2.1 Modélisation du problème

Soit un hypergraphe $H = (V, E)$, alors le problème s'exprime comme :

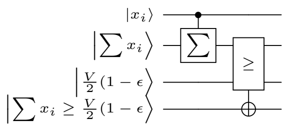
$$\min \sum_{e \in E} \lambda_e - 1$$



$$st. \sum_{v \in V} x_v \leq \frac{|V|}{2}(1 + \epsilon)$$



$$\sum_{v \in V} x_v \geq \frac{|V|}{2}(1-\epsilon)$$



$$x_v \in \{0,1\}, \ \forall v \in V$$

L'algorithme de Grover permet une recherche d'éléments dans un ensemble non structuré. Dans notre exemple, l'ensemble est l'espace de recherche défini par toutes les affectations possibles des variables x_v et les éléments recherchés sont des affectations qui valident les contraintes du problème.

À partir de cette modélisation il est possible de construire un oracle pour l'algorithme de recherche de Grover. En effet, les opérations nécessaires pour encoder ce circuit sont : +/-, $\leq$, $\geq$ et $\neq$. La construction du circuit final reprend en partie des codes de sous-circuits présentés dans [6].

2.2 Modélisation du problème en QUBO

Les algorithmes variationels sont des algorithmes d'approximation quantique minimisant un modèle d'Ising pouvant être généré à partir d'une fonction quadratique non contrainte. Les ordinateurs à recuit quantique peuvent également résoudre ces modèles.

Dans [4] les auteurs ont définit un modèle QUBO pour le problème du partitionnement dans les graphes. Le modèle présenté ci-dessous est une extension possible pour les hypergraphes :

$$\min \ A \times \sum_{e} \left(1 - \prod_{v \in e} x_v - \prod_{v \in e}(1-x_v)\right) + B \times \left(\sum_{v} x_v - \frac{|V|}{2}(1+\epsilon)\right)^2$$

Un hypergraphe $H = (V, E)$ peut également être modélisé en un graphe $G = (V, E')$ dans lequel $E' = \{(x_u, x_v) | (x_u, x_v) \in e, \ \forall e \in E\}$ et d'utiliser la formulation de [4] pour les graphes, au risque de compter un nombre d'arêtes coupées supérieur au nombre d'hyperarêtes réellement coupées pour une même affectation des x_v.

La construction des circuits pour QAOA et VQE reprend en partie la méthodologie présentée dans [1].

3 Conclusions et perspectives

Le nombre de qubits évolue linéairement en fonction de la taille des instances mais le circuit pour l'algorithme de Grover requiert plus de qubits que le circuit pour QAOA. Également pour le nombre de portes utilisées, QAOA requiert moins de portes que l'approche avec Grover. Du point de vue de la complexité en espace et en nombre de portes, QAOA apparaît comme plus intéressant. Cependant, l'absence de contraintes fortes dans QAOA perturbe la convergence vers une solution optimale contrairement à Grover qui accepte un modèle contraint.

Les modèles de partitionnement présentés peuvent être étendues pour du $k-$partitionnement moyennant un coût en espace de $O(|V|log_2(k))$ qubits supplémentaires avec l'approche avec Grover et $O((k-1)|V|)$ qubits avec QAOA.

Références

[1] Eric Bourreau, Gérard Fleury, and Philippe Lacomme. *Découverte de l'Informatique Quantique*, volume 1. Eyrolles, 2022 (à paraître).

[2] Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, and Sam Gutmann. A quantum approximate optimization algorithm, 2014.

[3] Lov K. Grover. Quantum Computers Can Search Rapidly by Using Almost Any Transformation. 80(19) :4329–4332, May 1998.

[4] Andrew Lucas. Ising formulations of many np problems. *Frontiers in Physics*, 2, 2014.

[5] Alberto Peruzzo, Jarrod Mcclean, Peter Shadbolt, Man Hong Yung, Xiaoqi Zhou, Peter Love, Alán Aspuru-Guzik, and Jeremy O'Brien. A variational eigenvalue solver on a quantum processor. *Nature communications*, 5, 04 2013.

[6] Julien Rodriguez. Évaluation du potentiel des machines quantiques pour l'optimisation combinatoire. Master's thesis, July 2020.