

# Trouver des spanners peu denses dans les cliques temporelles \*

Arnaud Casteigts<sup>1</sup>, Joseph G. Peters<sup>2</sup>, Jason Schoeters<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Univ. Bordeaux, Bordeaux INP, CNRS, LaBRI, UMR5800, F-33400 Talence, France  
{arnaud.casteigts, jason.schoeters}@labri.fr

<sup>2</sup> School of Computing Science, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada  
peters@cs.sfu.ca

<sup>3</sup> LITIS - Laboratoire d'Informatique, de Traitement de l'Information et des Systèmes  
jason.schoeters@univ-lehavre.fr

**Mots-clés** : réseaux dynamiques, connexité temporelle, spanners

## 1 Introduction

L'étude des réseaux hautement dynamiques a gagné en intérêt avec l'émergence de contextes technologiques où les entités se déplacent et communiquent (véhicules, robots, drones, etc.). Ces réseaux peuvent être modélisés par des graphes dynamiques, aussi appelés graphes temporels, qui se représentent de différentes manières. Ici, nous considérons un modèle simple qui consiste à étiqueter les arêtes d'un graphe par des entiers qui indiquent quand l'arête est présente. Lorsque le réseau est fortement dynamique, les propriétés d'intérêt s'expriment souvent au cours du temps, plutôt qu'à un instant donné. Par exemple, un graphe peut ne jamais être connexe mais offrir une forme de connexité basée sur la notion de *trajet*, à savoir un chemin qui peut se réaliser à travers le temps.

En 2002, Kempe, Kleinberg et Kumar [3] posent la question, étant donné un graphe temporellement connexe, si il existe toujours un sous-graphe peu dense tel que la connexité temporelle soit préservée. Cette question est restée ouverte 14 ans, jusqu'à ce que Axiotis et Fotakis [1] y répondent négativement en exhibant des graphes denses n'admettant pas de spanner peu dense.

Dans ce travail, nous montrons qu'il est néanmoins possible de trouver un spanner temporel de taille  $O(n \log n)$  dans les cliques temporelles, apportant ainsi la première réponse positive depuis la question de Kempe *et al.* Le problème peut se réduire au cas particulier où chaque arête n'a qu'une date et les arêtes incidentes ont des dates différentes. Un exemple est donné dans la Figure 1.

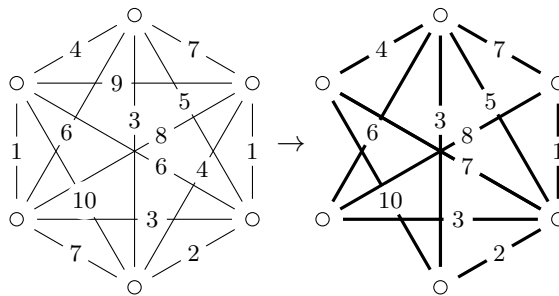


FIG. 1 – Exemple d'une clique temporelle et un de ses spanners temporels (non-minimal).

## 2 Définitions et algorithme

Pour tout sommet  $v$ , on note  $e^-(v)$  l'arête incidente à  $v$  ayant la plus petite étiquette/date, et symétriquement pour  $e^+(v)$ . Remarquons que si  $e^-(v) = \{u, v\}$ , alors le sommet  $u$  peut joindre tous les autres via  $v$  (par un trajet). Symétriquement, si  $e^+(v) = \{u, v\}$ , alors tous les sommets peuvent joindre  $u$  via  $v$ . Ainsi, il arrive qu'un sommet  $u$  puisse déléguer à un voisin  $v$  la responsabilité de joindre tous les autres sommets. On dit que  $u$  *délègue ses émissions* à  $v$ . Symétriquement, un sommet  $u$  peut *déléguer ses réceptions* à un sommet  $v$ , de sorte que les autres sommets se contentent de joindre  $v$  pour joindre  $u$ . On dit qu'un sommet  $v$  est *démontable* s'il peut déléguer à la fois ses émissions et ses réceptions.

\*Version courte d'un article publié dans JCSS [2]

## 2.1 Feux d'artifices

L'idée des feux d'artifices est de mutualiser les délégations de sorte que plusieurs sommets délèguent à un seul sommet. Construisons donc d'abord les forêts de délégations d'émission  $\mathcal{T}^- = \{(u, v) | \{u, v\} = e^-(v)\}$  et de réceptions  $\mathcal{T}^+ = \{(v, u) | \{v, u\} = e^+(v)\}$ . Par construction, des chemins orientés dans  $\mathcal{T}^-$  et dans  $\mathcal{T}^+$  correspondent à des trajets dans  $\mathcal{G}$ . Dans  $\mathcal{T}^-$ , appelons les sommets sans arcs sortants des *émetteurs*, et dans  $\mathcal{T}^+$  les sommets sans arcs entrants sont appelés des *récepteurs*.

Ensuite, en combinant  $\mathcal{T}^-$  et  $\mathcal{T}^+$ , on définit un spanner dans lequel on inclut les arêtes correspondant aux deux forêts, ainsi que toutes les arêtes entre émetteurs et collecteurs. Ainsi, chaque sommet peut joindre tous les autres sommets par un trajet passant par un émetteur, puis un récepteur, et enfin le sommet destination. Le spanner est de taille  $\binom{n}{2}/2 + O(n)$ .

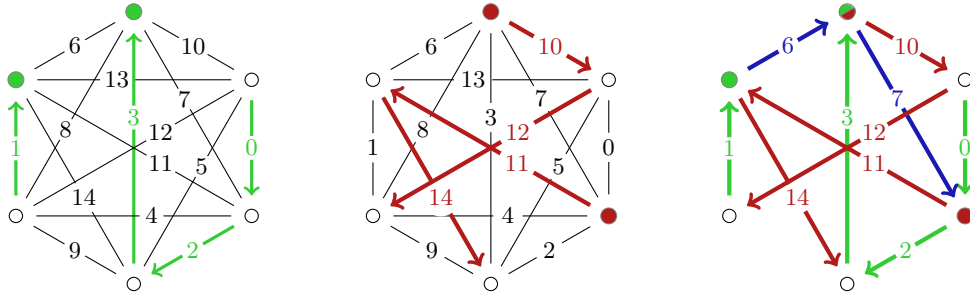


FIG. 2 – Exemple de forêts de délégations  $\mathcal{T}^-$  (en vert) et  $\mathcal{T}^+$  (en rouge), dont la combinaison induit un spanner si l'on y ajoute les arêtes entre émetteurs et récepteurs (en bleu).

Deux cas se présentent maintenant. Soit il existe un sommet démontable  $v$ , dans quel cas on le démonte et on recommence les feux d'artifices sur l'instance  $\mathcal{G} \setminus v$ . Sinon, le spanner résultant des feux d'artifices admet beaucoup de structure, et on procède par la délégation en couches.

## 2.2 Délégation en couches

Le spanner résultant des feux d'artifices contient exactement  $n/2$  émetteurs et  $n/2$  récepteurs, ce qui implique que le spanner est un graphe biparti complet avec d'un côté les émetteurs et de l'autre les récepteurs. Finalement,  $\mathcal{T}^-$  et  $\mathcal{T}^+$  sont des couplages parfaits.

En sautant quelques détails techniques, cette structure nous permet de réduire notre problème de trouver un spanner peu dense, au problème de faire en sorte que tous les émetteurs puissent déléguer à un seul émetteur. La délégation en couches procède par d'abord trier localement les arêtes incidentes aux émetteurs (des plus petites étiquettes au plus grandes). Ensuite, on fait des itérations portant sur des intervalles de rangs d'arêtes de taille doublante, de sorte qu'à chaque itération la moitié des émetteurs délèguent leurs émissions à l'autre moitié des émetteurs en sélectionnant les arêtes disponibles. Il ne reste plus qu'à sélectionner également  $\mathcal{T}^-$  et  $\mathcal{T}^+$  pour obtenir un spanner.

Au total,  $O(n)$  arêtes sont ainsi sélectionnées à chaque itération, pour  $O(\log n)$  itérations, plus  $O(n)$  arêtes de  $\mathcal{T}^-$  et  $\mathcal{T}^+$ , ce qui résulte en un spanner de taille  $O(n \log n)$ .

## Références

- [1] Kyriakos Axiotis, and Dimitris Fotakis. On the size and the approximability of minimum temporally connected subgraphs. *arXiv preprint* arXiv :1602.06411 (2016).
- [2] Arnaud Casteigts, Joseph G. Peters, and Jason Schoeters. Temporal cliques admit sparse spanners. *Journal of Computer and System Sciences* 121 (2021) : 1-17.
- [3] David Kempe, Jon Kleinberg, and Amit Kumar. Connectivity and inference problems for temporal networks. *Journal of Computer and System Sciences* 64.4 (2002) : 820-842.