Complexité du problème de Steiner dynamique

Stefan Balev[1], Yoann Pigné[1], Éric Sanlaville[1], Mathilde Vernet[2]

[1] Normandie Univ, UNIHAVRE, UNIROUEN, INSA Rouen, LITIS, 76600 Le Havre, France

{stefan.balev,yoann.pigne,eric.sanlaville}@univ-lehavre.fr

[2] LIA, Avignon Université, 84000 Avignon, France

mathilde.vernet@univ-avignon.fr

Mots-clés : *arbre de Steiner, graphe dynamique, complexité, cas polynomial.*

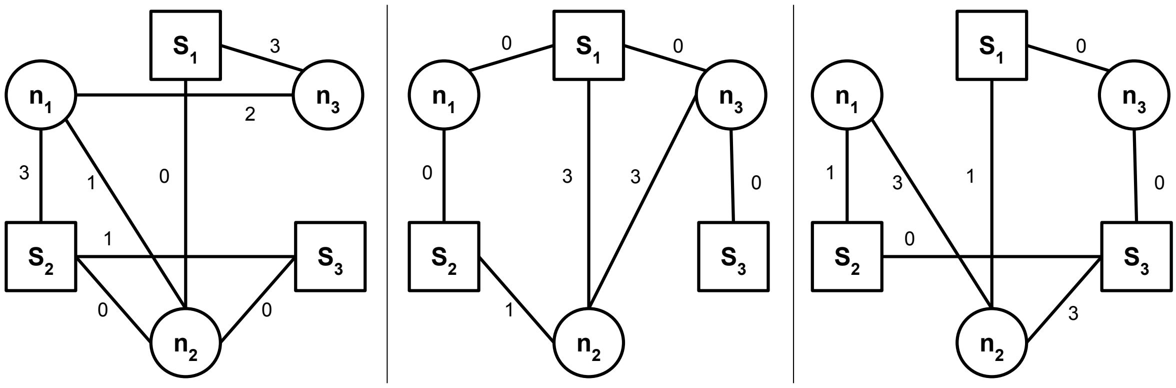

FIG. 1: Évolution d'un graphe dynamique sur trois pas de temps. Les poids sont indiqués sur les arêtes et varient au cours du temps. Les sommets carrés sont les sommets terminaux.

Les graphes dynamiques sont pertinents à étudier. En effet, dans de nombreux domaines d'applications, le graphe associé peut évoluer au cours du temps, en considérant par exemple une variation des arêtes ou de leurs poids associés. Une revue détaillée des différents domaines d'application possibles est proposé par [3]. Que l'on parle de réseaux sociaux ou de réseaux de communication comme les réseaux ad-hoc par exemple, ils sont rarement figés dans le temps et il est donc pertinent d'avoir un modèle qui permette des variations. Même les réseaux logistiques, dans lesquels la dynamique du réseau peut être très lente, peuvent bénéficier des modèles de graphes dynamiques [1].

Le problème de l'arbre de Steiner consiste à trouver, dans un graphe, un arbre de poids minimum couvrant un ensemble de sommets appelés *terminaux.* Il s'agit d'un problème NP-complet [4], même lorsque les poids sur les arêtes sont unitaires [2]. Nous nous intéressons dans ce travail à l'extension du problème de Steiner aux graphes dynamiques. La figure 1 montre un exemple de graphe dynamique avec une instance de ce problème. Sur un tel graphe, des arêtes peuvent apparaître et disparaître et l'on cherche un moyen de connecter certains sommets, ce qui rend ce problème applicable sur des réseaux de capteurs par exemple.

Nous considérons plusieurs définitions possibles permettant d'étendre ce problème à un contexte dynamique et choisissons de nous concentrer sur une version où l'ensemble des sommets terminaux ainsi que l'ensemble des sommets intermédiaires (appelé *ensemble de Steiner*) assurant la connexité des terminaux restent fixe au cours du temps. Nous cherchons donc à chaque pas de temps un arbre de poids minimum permettant de connecter les sommets terminaux. Nous montrons que ce problème est NP-complet, même avec deux terminaux et des poids unitaires alors que le problème correspondant dans un graphe statique est l'une des rares versions polynomiales de l'arbre de Steiner, puisqu'il correspond à un plus court chemin.

Ce problème est difficile à résoudre mais en considérant des ensembles de Steiner de taille fixe, il est alors possible d'énumérer les différents ensembles possibles au premier pas de temps, puis de réduire cet ensemble de solutions en éliminant pas de temps après pas de temps les ensembles de Steiner qui ne restent pas des solutions sur la durée de l'évolution du graphe. Pour des ensembles de Steiner de taille fixée, cela peut être calculé de cette manière en un temps raisonnable. C'est ce qui est montré par une étude expérimentale.

References

[1] Thibaut Démare, Cyrille Bertelle, Antoine Dutot, and Laurent Lévêque. Modeling logistic systems with an agent-based model and dynamic graphs. *Journal of Transport Geography*, 62:51 – 65, 2017.

[2] Michael R Garey and David S Johnson. *Computers and intractability*, volume 174. Freeman San Francisco, 1979.

[3] Petter Holme. Modern temporal network theory: a colloquium. *The European Physical Journal B*, 88(9):234, 2015.

[4] Richard M. Karp. *Reducibility among Combinatorial Problems*, pages 85–103. Springer US, Boston, MA, 1972.