Modèle pour un problème d'ordonnancement de type RCPSP multi-mode avec précédences généralisées

Baptistin Carvin[1,2], Odile Bellenguez[1], Guillaume Massonnet[1]

[1] IMT Atlantique, F-44300 Nantes, France

baptistin.carvin@vif.fr,{odile.bellenguez,guillaume.massonnet}@imt-atlantique.fr

[2] Vif, F-44240 La Chapelle-sur-Erdre, France

Mots-clés : *ordonnancement, stock, ressources cumulatives, précédences généralisées*

1 Introduction

Nous nous intéressons à un problème d'ordonnancement dans l'industrie agroalimentaire : on considère un atelier utilisant K machines parallèles avec des vitesses de travail différentes. Chacune est représentée par une ressource renouvelable $u \in \mathcal{U}_K$ disponible en $Q_u = 1$ unité. De plus, on considère des ressources auxiliaires (outils, personnel, etc.) $u \in \mathcal{U}_R$, qui sont cumulatives, renouvelables et disponibles en $Q_u \in \mathbb{N}$ unités. On a également des contraintes sur les produits finis, semi-finis et les matières premières qui nécessitent de suivre les niveaux minimums d'inventaire. En nous inspirant de [2], nous proposons de modéliser ces stocks intermédiaires comme des ressources cumulatives non renouvelables $u \in \mathcal{U}_P$ ayant une capacité maximale $Q_u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ arbitrairement grande. Enfin, l'ensemble des ressources est noté $\mathcal{U} = \mathcal{U}_K \cup \mathcal{U}_R \cup \mathcal{U}_P$.

La production doit être terminée en T unités de temps au maximum. Chacune des J tâches $j \in \mathcal{J}$ à réaliser doit débuter au plus tôt à la date r_j et s'achever au plus tard à la date $d_j \leq T$. De plus, elle possède un ensemble donné ($\mathcal{M}_j$) de modes d'exécution possibles. Chaque mode $m \in \mathcal{M}_j$ correspond à un temps de fabrication p_{jm}, des quantités b_{jmu} de ressources u consommées ou monopolisées durant la fabrication de j et des quantités e_{jmu} de ressources u produites ou restituées à l'achèvement de la tâche j.

Entre la fin d'une tâche j et le début d'une tâche j', un temps de changement d'une durée $s_{jj'u}$ est nécessaire pour préparer la ressource machine u. Ce temps de changement monopolise la ressource machine u ainsi que toutes les ressources $u \in \mathcal{U}_R$ nécessaires à la tâche j' dans son mode m. L'ensemble des ressources monopolisables aussi durant le changement est noté $\mathcal{U}_S = \mathcal{U}_K \cup \mathcal{U}_R$. Certaines tâches ($(j, j') \in \mathcal{J}_{prec} \subseteq \mathcal{J}^2$) sont soumises à des contraintes de précédence généralisées : chaque relation de précédence impose un temps minimum $\delta^-_{jj'}$ et un temps maximum $\delta^+_{jj'}$ entre la complétion de la tâche j et le début de la tâche j'. Nous ajoutons 2 tâches fictives d'indice 0 et $J+1$ représentant le début et la fin du projet et définissons 3 ensembles : $\mathcal{J}_i = \mathcal{J} \cup \{0\}$, $\mathcal{J}_f = \mathcal{J} \cup \{J+1\}$, $\mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_f$.

Les livraisons de matières premières et les expéditions de produits finis sont représentées comme des tâches $j \in \mathcal{J}$ qui ne nécessitent et ne produisent aucune ressource mis à part celles livrées/expédiées.

2 Un premier modèle MILP

Le modèle utilise 7 types de variables. Tout d'abord, $X_{jj'u} \in [0, Q_u]$, un réel représentant la quantité de ressources u transmise de la tâche j à la tâche j'. $Y_{jm} \in \{0, 1\}$ est un booléen valant 1 si et seulement si $j \in \mathcal{J}_+$ est traité par le mode $m \in \mathcal{M}_j$. S_j, T_j et $C_j \in [0, T]^3$: trois entiers représentant respectivement la date de début du temps de changement, de début de fabrication et de fin de fabrication de la tâche j. Le modèle utilise aussi $Ls_{jj'} \in \{0,1\}$ et $Lp_{jj'} \in \{0,1\}$, deux booléens qui valent 1 si et seulement si le temps de changement (respectivement de fabrication) de j' débute après l'achèvement de j.

La fonction objectif (1) minimise la date achèvement de la tâche fictive de fin de projet. La contrainte (2) impose que chaque tâche soit ordonnancée dans exactement un mode. (3) et (4) définissent les variables $Ls_{jj'}$ et $Lp_{jj'}$. La contrainte (5) utilise $Ls_{jj'}$ pour garantir qu'une tâche transmette ses ressources $u \in \mathcal{U}_S$ uniquement à des tâches qui n'ont pas encore commencé leur temps de changement au moment de sa complétion. La contrainte (6) utilise $Lp_{jj'}$ pour garantir qu'une tâche transmette ses ressources $u \in \mathcal{U}_P$ uniquement à des tâches qui n'ont pas encore commencé leur fabrication au moment de sa complétion. Les contraintes (7) et (8) assure la conservation des flots. Elles imposent qu'une tâche reçoive, selon son mode m, toutes les ressources u dont elle a besoin (b_{jmu} unités) et qu'elle transmette toutes les ressources u qu'elle restitue ou produit (e_{jmu} unités). La contrainte (9) garantie que la fabrication de j débute après la fin de son temps de changement (dépendant de la dernière tâche ayant utilisé la ressource machine u) et la contrainte (10) garantie que la fabrication de j s'achève après son temps de changement et sa durée de fabrication. Enfin, les contraintes (11) et (12) font respecter les précédences généralisées entre les tâches.

$$\min \quad C_{J+1} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{m \in \mathcal{M}_j} Y_{jm} = 1 \qquad \forall j \in \mathcal{J}_+ \tag{2}$$

$$(Ls_{jj'} - 1)T \leq S_{j'} - C_j \leq Ls_{jj'} \cdot T \qquad \forall j, j' \in {\mathcal{J}_+}^2 \tag{3}$$

$$(Lp_{jj'} - 1)T \leq T_{j'} - C_j \leq Lp_{jj'} \cdot T \qquad \forall j, j' \in {\mathcal{J}_+}^2 \tag{4}$$

$$X_{jj'u} \leq Ls_{jj'} Q_u \qquad \forall j, j' \in {\mathcal{J}_+}^2, \forall u \in \mathcal{U}_S \tag{5}$$

$$X_{jj'u} \leq Lp_{jj'} Q_u \qquad \forall j, j' \in {\mathcal{J}_+}^2, \forall u \in \mathcal{U}_P \tag{6}$$

$$\sum_{j' \in \mathcal{J}_i, j' \neq j} X_{j'ju} = \sum_{m \in \mathcal{M}_j} Y_{jm} b_{jmu} \qquad \forall j \in \mathcal{J}_f, \forall u \in \mathcal{U} \tag{7}$$

$$\sum_{j' \in \mathcal{J}_f, j' \neq j} X_{jj'u} = \sum_{m \in \mathcal{M}_j} Y_{jm} e_{jmu} \qquad \forall j \in \mathcal{J}_i, \forall u \in \mathcal{U} \tag{8}$$

$$T_{j'} \geq S_{j'} + s_{jj'u} \cdot X_{jj'u} \qquad \forall j, j' \in {\mathcal{J}_+}^2, \forall u \in \mathcal{U}_K \tag{9}$$

$$C_j \geq T_j + p_{jm} Y_{jm} \qquad \forall j \in \mathcal{J}_+, \forall m \in \mathcal{M}_j \tag{10}$$

$$T_{j'} - C_j \geq \delta^-_{jj'} \qquad \forall (j, j') \in \mathcal{J}_{prec} \tag{11}$$

$$T_{j'} - C_j \leq \delta^+_{jj'} \qquad \forall (j, j') \in \mathcal{J}_{prec} \tag{12}$$

$$0 \leq S_j \leq T, \quad r_j \leq T_j \leq C_j \leq d_j \qquad \forall j \in \mathcal{J}_+ \tag{13}$$

$$0 \leq X_{jj'u} \leq Q_u, \quad X_{jj'u} \in \mathbb{N} \qquad \forall j, j' \in {\mathcal{J}_+}^2, \forall u \in \mathcal{U} \tag{14}$$

$$Y_{jm} \in \{0,1\} \qquad \forall j \in \mathcal{J}_+, \forall m \in \mathcal{M}_j \tag{15}$$

$$Ls_{jj'} \in \{0,1\}, \quad Lp_{jj'} \in \{0,1\} \qquad \forall j, j' \in {\mathcal{J}_+}^2 \tag{16}$$

3 Perspective

Les travaux de Larroche et al. [1], qui considèrent un problème de lot-sizing, permettent de situer une première étape de décision essentielle dans un contexte d'application agroalimentaire. Les décisions prises à cette maille donnent lieu à une problématique d'ordonnancement riche pour lequel nous proposons ici une première modélisation, qui va faire l'objet de différents tests afin d'évaluer les performances obtenues, avant d'intégrer des contraintes additionnelles telles que la gestion des indisponibilités machine ou le respect des capacités maximales sur les stocks intermédiaires. Nous envisageons par la suite de décliner différentes méthodes afin de parvenir à traiter des problèmes de taille importante, tels qu'introduit dans ce même article.

Références

[1] François Larroche, Odile Bellenguez, and Guillaume Massonnet. Clustering-based solution approach for a capacitated lot-sizing problem on parallel machines with sequence-dependent setups. *International Journal of Production Research* :1-24, 2021.

[2] Klaus Neumann and Christoph Schwindt. Project scheduling with inventory constraints. *Mathematical Methods of Operations Research* 56.3 :513-533, 2003.