Complexité du problème de l'unicité d'un transversal minimum dans un graphe

Olivier Hudry[1], Antoine Lobstein[2]

[1] Télécom Paris, 91123 Palaiseau, France
olivier.hudry@telecom-paris.fr

[2] CNRS et LRI, université Paris-Sud, 91405 Orsay, France
antoine.lobstein@lri.fr

Mots-clés *: théorie de la complexité, problèmes NP-difficiles, optimisation combinatoire, théorie des graphes, transversal, clique, stable, problème de satisfiabilité (SAT), transformations polynomiales.*

I. Introduction

Étant donné un graphe $G = (S, A)$ non orienté, un *transversal* de G est un sous-ensemble T de S tel que toute arête de G a au moins une extrémité dans T. Le problème d'optimisation associé consiste à déterminer un transversal de cardinal minimum dans G. Ce problème est bien connu pour être NP-difficile (plus précisément, le problème de décision qui lui est associé est NP-complet [1, 3]).

Nous nous intéressons ici à la complexité des deux problèmes de décision suivants :

Nom : Unicité du transversal de cardinal majoré (U-TCM)
Instance : un graphe $G = (S, A)$; un entier K
Question : G admet-il un unique transversal de cardinal inférieur ou égal à K ?

et

Nom : Unicité du transversal optimal (U-TO)
Instance : un graphe $G = (S, A)$
Question : G admet-il un unique transversal de cardinal minimum ?

Pour étudier la complexité de U-TCM et U-TO, nous considérons deux autres problèmes d'unicité, à savoir le problème de l'unicité d'une fonction d'assignation permettant de satisfaire une formule logique :

Nom : Unicité pour le problème de satisfiabilité (U-SAT)
Instance : un ensemble B de variables booléennes, m sous-ensembles (ou *clauses logiques*) E_j ($1 \le j \le m$) de $B \cup \overline{B}$ (où $\overline{B}$ est l'ensemble des complémentaires des variables de B)
Question : existe-t-il une unique fonction f définie sur B à valeurs dans {vrai, faux} de sorte que chaque sous-ensemble E_j ($1 \le j \le m$) contienne au moins un élément à vrai par f ?

et la variante de U-SAT, notée U-1-dans-3-SAT, dans laquelle chaque sous-ensemble E_j contient exactement trois éléments de $B \cup \overline{B}$ et où l'on cherche s'il existe une unique fonction f définie sur B à valeurs dans {vrai, faux} de sorte que chaque sous-ensemble E_j ($1 \leq j \leq m$) contienne exactement un élément à vrai par f ?

II. Résultats de complexité

Les problèmes U-TCM, U-TO, U-SAT et U-1-dans-3-SAT ne sont pas connus pour être dans NP $\cup$ co-NP mais U-SAT et U-1-dans-3-SAT sont de même complexité au sens où l'un se transforme en l'autre selon des réductions polynomiales [2]. Ces deux problèmes sont NP-difficiles et appartiennent à la classe DP (aussi notée BH_2 dans la hiérarchie booléenne) qui regroupe les problèmes qui s'expriment, sous forme de langages, comme l'intersection d'un langage appartenant à NP (correspondant ici à la question « existe-t-il au moins une fonction d'assignation… ») et d'un langage appartement à co-NP (correspondant ici à la question « existe-t-il au plus une fonction d'assignation… »). On notera l'inclusion NP $\cup$ co-NP $\subseteq$ DP. On remarquera par ailleurs que, dans [4], C. H. Papadimitriou doute que U-SAT soit DP-complet.

En notant < la réduction polynomiale, nous établissons les relations suivantes :

- U-1-dans-3-SAT < U-TCM
- U-TCM < U-SAT
- U-1-dans-3-SAT < U-TO.

Compte tenu de la relation U-SAT < U-1-dans-3-SAT établie dans [2] et grâce à la transitivité des réductions polynomiales, on en déduit que U-TCM, U-SAT et U-1-dans-3-SAT sont de même complexité (d'où il découle que U-TCM est NP-difficile et appartient à DP, ce que l'on peut par ailleurs établir directement).

Concernant U-TO, les réductions U-1-dans-3-SAT < U-TO et U-SAT < U-1-dans-3-SAT entraînent la relation U-SAT < U-TO, ce que l'on peut interpréter de la façon suivante : U-TO est au moins aussi difficile à résoudre que U-SAT (en particulier, U-TO est NP-difficile). Par ailleurs, nous montrons que U-TO appartient à la classe, notée L^{NP} ou aussi Θ_2, des problèmes de décision que l'on peut résoudre à l'aide d'un algorithme résolvant un problème NP-complet que l'on appelle un nombre logarithmique de fois (on notera l'inclusion DP $\subseteq L^{NP}$).

Enfin, compte tenu des liens habituels entre transversal, clique (une clique étant un sous-graphe complet) et stable (un stable étant un sous-graphe sans arête), les résultats précédents concernant U-TCM et U-TO s'étendent facilement à leurs équivalents relatifs à l'unicité d'une clique ou d'un stable de cardinal minoré ou à l'unicité d'une clique maximum ou d'un stable maximum.

III. Références

[1] M. R. Garey et D. S. Johnson. *Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, New York, 1979.

[2] O. Hudry et A. Lobstein. Some Complexity Considerations on the Uniqueness of Solutions for Colouring and Satisfiability Problems. Soumis pour publication.

[3] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Tatcher (eds.), *Complexity of computer computations*, Plenum Press, New York, 85-103, 1972.

[4] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, Reading, 1994.