

Cut&Price pour le problème de coloration

Alexandre Dupont-Bouillard, Pierre Fouilhoux, Roland Grappe, Mathieu Lacroix

Univ. Sorbonne Paris Nord, LIPN, France

{dupont-bouillard,fouilhoux,grappe,lacroix}@lipn.fr

Mots-clés : *coloration, cut&price, inégalités Chvátal-Gomory.*

Une coloration d'un graphe non-orienté est une affectation de couleurs aux sommets telle que les deux extrémités de toute arête aient une couleur différente. Le problème de coloration est de trouver une coloration minimisant le nombre de couleurs utilisées. Ce problème classique d'optimisation combinatoire est NP-difficile et a des applications en réseaux de télécommunications ou en conception d'emploi du temps.

Le problème de coloration est intimement lié aux *stables* du graphe : un stable est un ensemble de sommets deux à deux non-adjacents. En effet, tout ensemble de sommets d'une même couleur dans une coloration est un stable. Cette remarque a amené Mehrotra et Trick [8] à proposer la formulation suivante où l'on note \mathcal{S} l'ensemble des stables d'un graphe $G = (V, E)$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{S \in \mathcal{S}} x_S \\ \sum_{S \in \mathcal{S} | v \in S} \quad & x_S \geq 1 \quad \forall v \in V \\ 0 \leq x_S \leq 1 \quad & \forall S \in \mathcal{S} \\ x_S \in \mathbb{N}, \forall S \in \mathcal{S} \end{aligned} \tag{1}$$

Le nombre de stables d'un graphe étant exponentiel en général, la relaxation linéaire est résolue par génération de colonnes : à partir d'un sous-ensemble de colonnes que l'on complète itérativement par des colonnes de coûts réduits négatifs jusqu'à ce que toute colonne ait un coût réduit positif ou nul. A chaque itération, la résolution du PL, appelé *problème restreint*, donne les valeurs duales des contraintes (1) que l'on note $\lambda_v, v \in V$.

Le sous-problème de génération d'une colonne, appelé *pricing*, se ramène pour cette formulation à la recherche d'un stable S qui minimise la fonction : $1 - \sum_{v \in S} \lambda_v$. Autrement dit, trouver un stable de poids maximum dans le graphe G avec λ comme vecteur de poids sur les sommets.

Plusieurs algorithmes basés sur la formulation de Mehrotra et Trick ont été développés. Gualando et Malucelli [5] ont proposé un schéma de programmation par contraintes pour le pricing et ont réussi à résoudre 22 instances ouvertes de la librairie de référence [1] en 2010. Malaguti, Monaci et Toth [7] ont, notamment grâce à des heuristiques de pricing, réussi à résoudre 5 instances de plus en 2011. Les résultats de la formulation de Mehrotra et Trick dépendent fortement de la précision des solveurs utilisés. En 2011, Held, Cook et Sewell ont proposé une technique afin d'assurer la validité de la borne inférieure fournie par la formulation indépendamment de la qualité des approximations fournies par les solveurs, ainsi qu'une manière de paralléliser la résolution. En 2014 Morrison, Sauppe, Sewell et Jacobson [9] ont présenté une nouvelle règle de branchement qui leur permet de résoudre 7 instances plus rapidement que Malaguti, Monaci et Toth [7]. Pour la formulation de Mehrotra et Trick, Hansen, Labbé et Schindl [6] renforcent la relaxation linéaire en ajoutant des contraintes qui imposent que le nombre de stables intersectant chaque cycle impair soit supérieur ou égal à 3. Ces inégalités sont *robustes* [4], c'est-à-dire qu'elles ne changent pas le problème de pricing. Cependant, les résultats expérimentaux montrent qu'en général, ces coupes n'améliorent pas la valeur de relaxation.

Nous proposons de renforcer la relaxation linéaire par l'ajout de contraintes de Chvátal-Gomory qui sont non robustes pour cette formulation. Les inégalités de Chvátal-Gomory sont valides pour

tout PLNE et sont utilisées dans de nombreux solveurs pour accélérer la résolution de formulations compactes. Non nécessaires à la validité de la formulation, elles permettent en général d'en améliorer grandement la valeur de relaxation. Formellement, étant donné $u \in [0, 1]^{|V|}$, on associe la contrainte de Chvátal-Gomory de rang 1 suivante :

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \left[\sum_{v \in S} u_v \right] x_S \geq \left\lfloor \sum_{v \in V} u_v \right\rfloor \quad (2)$$

L'ensemble des contraintes que l'on peut obtenir de cette manière est appelé fermeture de Chvátal.

L'heuristique de séparation des contraintes (2) que nous utilisons est celle proposée par Fischetti et Lodi [3], qui modélise le problème comme un PLNE résolu avec un nombre limite sur le nombre de noeuds explorés dans l'arbre de branchements.

Les inégalité (2) n'étant pas robuste, il faut alors adapter l'algorithme de pricing. Soit \mathcal{U} l'ensemble des vecteurs u de coefficients de Chvátal-Gomory associés aux contraintes (2) présentes dans le problème restreint. Soit μ_u la variable duale associée à la contrainte (2) définie par le vecteur u . Le coût réduit d'un stable S devient :

$$1 - \sum_{v \in S} \lambda_v - \sum_{u \in \mathcal{U}} \mu_u \left[\sum_{v \in S} u_v \right]$$

Pour le pricing, notre approche repose sur l'idée suggérée par Spoorendonk [2], qui consiste à le modéliser via un PLNE. Dans ce PLNE, en plus des contraintes de stables, s'ajoutent une variable entière et une contrainte pour chaque inégalité de Chvátal-Gomory du problème restreint.

Nous proposons une étude expérimentale sur les instances classiques [1] pour montrer l'impact des inégalités de Chvátal-Gomory sur la valeur de relaxation, le nombre de colonnes générées et le temps total de calcul. Nous étudions plusieurs stratégies d'alternance de cutting et de pricing.

Références

- [1] Graph coloring benchmarks : <https://sites.google.com/site/graphcoloring/vertex-coloring>.
- [2] Guy Desaulniers, Jacques Desrosiers, and Simon Spoorendonk. Cutting planes for branch-and-price algorithms. *Networks*, 58 : 301–310, 2011.
- [3] Matteo Fischetti and Andrea Lodi. Optimizing over the first chvátal closure. *Mathematical Programming*, 2007.
- [4] Ricardo Fukasawa, Humberto Longo, Jens Lysgaard, Marcus Poggi, Marcelo Reis, Eduardo Uchoa, and Renato Werneck. Robust branch-and-cut-and-price for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, 106 : 491–511, 2006.
- [5] Stefano Gualandí and Federico Malucelli. Exact solution of graph coloring problems via constraint programming and column generation. *INFORMS Journal on Computing*, 24, 2010.
- [6] P. Hansen, M. Labbé, and D. Schindl. Set covering and packing formulations of graph coloring : Algorithms and first polyhedral results. *Discrete Optimization*, 6(2) : 135–147, 2009.
- [7] Enrico Malaguti, Michele Monaci, and Paolo Toth. An exact approach for the vertex coloring problem. *Discrete Optimization*, 8(2) : 174–190, 2011.
- [8] Anuj Mehrotra and Michael A. Trick. A column generation approach for graph coloring. *INFORMS Journal on Computing*, 8 : 344–354, 1996.
- [9] David Morrison, Jason Sauppe, Edward Sewell, and Sheldon Jacobson. A wide branching strategy for the graph coloring problem. *INFORMS Journal on Computing*, 26 : 704–717, 11 2014.