Ordonnancements collectifs :
Étude axiomatique et algorithmique

Martin Durand, Fanny Pascual

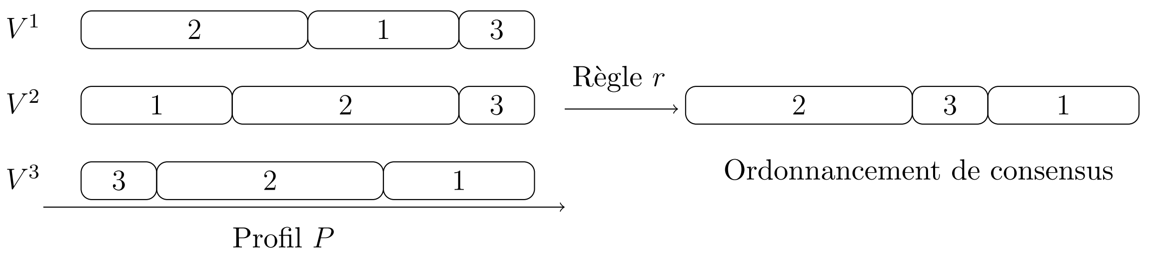
Sorbonne Université, LIP6, CNRS, 75005 Paris, France

martin.durand@lip6.fr, fanny.pascual@lip6.fr

Mots-clés : *ordonnancement, choix social computationnel, complexité, optimisation.*

1 Introduction

Le problème des *Ordonnancements Collectifs* [7] traite un ensemble $\mathcal{J}$ de n tâches communes à un ensemble $\mathcal{V}$ de v personnes, nommées agents, chaque tâche i ayant un temps d'exécution p_i. On considère que les tâches doivent être exécutées séquentiellement (sur une seule machine). Chaque agent $k \in \mathcal{V}$ a un ordonnancement préféré V^k correspondant à l'ordre dans lequel il souhaiterait que les tâches soient exécutées. Les v ordonnancements préférés des agents sont regroupés dans un profil de préférences P. Etant donné ce profil de préférences, notre but est de définir une règle d'agrégation qui retourne un *ordonnancement de consensus* satisfaisant au mieux l'ensemble des votants.



Exemple 1 *Considérons par exemple qu'une municipalité ait acté la construction de plusieurs infrastructures publiques dans une ville (piscine, gymnase, théâtre, ...). Pour des raisons de budget et de main d'oeuvre, les infrastructures ne peuvent pas être construites simultanément. Les projets ont des durées de constructions différentes, et les citoyens sont alors appelés à voter pour exprimer leur opinion sur l'ordre dans lequel ils aimeraient que ces projets soient effectués. Dans une telle situation, chaque citoyen a intérêt à voir les projets réalisés le plus tôt possible. Il semble ainsi naturel de pénaliser le fait de réaliser un projet "en retard" par rapport à ce que souhaitent les citoyens, mais de ne pas pénaliser les projets "en avance".*

Exemple 2 *Une équipe dans une entreprise doit planifier ses projets pour les mois à venir, chaque projet ayant une durée propre et pouvant impliquer un investissement différent pour les membres de l'équipe (déplacements professionnels, horaires décalés, ...). Chaque membre de l'équipe indique son ordonnancement préféré de ces projets en fonction des périodes de temps les plus adaptées pour lui. Dans cette situation, il semble naturel de chercher un ordonnancement de consensus dans lequel chaque projet est le plus proche possible de sa position dans les ordonnancements préférés des agents.*

Dans le cas où toutes les tâches sont de même durée, on retrouve le problème classique du rangement de concensus [3]. Dans ce problème, les agents, appelés votants, expriment leurs préférences sur un ensemble de candidats sous la forme d'un rangement des candidats (du candidat préféré au candidat le moins apprécié). Le but est alors de retourner un rangement de consensus. Dans notre cas, les candidats sont des tâches ayant des longueurs différentes : il est important de tenir compte de ces longueurs, et les règles classiques ne peuvent pas être utilisées telles quelles.

Le problème des ordonnancements collectifs a été introduit récemment [7]. Les auteurs présentent le problème et s'intéressent en particulier à une adaptation de règles d'agrégation respectant le principe de Condorcet (cf section 3) et la règle ΣT que l'on présente ci-dessous.

Contributions Nous proposons de nouvelles règles d'agrégation pour le problème des ordonnancements collectifs, et nous étudions ces règles d'un point de vue axiomatique et algorithmique. Dans la section 2, nous présentons la règle ΣT et deux nouvelles règles. Dans la section 3, nous étudions les propriétés axiomatiques de ces règles d'agrégation. Ces propriétés sont principalement issues de la théorie du choix social. Nous introduisons également de nouveaux axiomes adaptés à notre contexte d'étude. Dans la section 4, nous nous intéressons aux propriétés computationnelles des différentes règles et présentons une heuristique efficace.

2 Trois règles d'agrégation

Les deux premières règles sont basées sur les dates de fin des tâches dans les ordonnancements préférés, ces dates de fin étant vues comme des dates d'échéance. La règle ΣT retourne un ordonnancement minimisant le retard moyen des tâches dans l'ordonnancement retourné, par rapport aux ordonnancements préférés des agents. La règle ΣD, retourne un ordonnancement minimisant la déviation moyenne des tâches dans l'ordonnancement retourné.

2.1 Minimiser la somme des retards : ΣT

On étend le critère du *retard* (T, pour *tardiness*), critère classique en ordonnancement [4]. Le retard d'une tâche i dans un ordonnancement S est la différence entre sa date de fin dans S, $C_i(S)$, et sa date d'échéance d_i, si $C_i(S) > d_i$: $T_i(S) = \max(0, C_i(S) - d_i)$. En sommant le retard sur l'ensemble des tâches, on obtient le retard de l'ordonnancement S.

Pour notre problème, en interprétant les dates de fin d'un ordonnancement comme les dates de fin attendues des tâches, on peut exprimer le retard d'un ordonnancement par rapport à un autre, et par extension le retard d'un ordonnancement par rapport à un profil de préférences.

$$\Sigma T(S,P) = \sum_{V^k \in P} \sum_{i \in \mathcal{J}} \max(0, C_i(S) - C_i(V^k))$$

La règle ΣT [7] retourne un ordonnancement minimisant la somme des retards avec le profil : elle retourne l'ordonnancement qui minimise le retard cumulé sur l'ensemble des tâches pour tous les votants. Dans des contextes comme celui de l'exemple 1, cette approche de minimisation du retard fait sens. En revanche, s'intéresser uniquement au fait que les candidats ne soient pas en retard dans le rangement retourné par rapport au profil ne correspond à aucune approche classique en choix social.

2.2 Minimiser la somme des déviations : ΣD

Un deuxième critère classique en ordonnancement est le critère de la *déviation* (D) [4]. La déviation associée à la tâche i est la valeur absolue de la différence entre la date de fin de i dans l'ordonnancement S, $C_i(S)$, et sa date d'échéance d_i : $D_i(S) = |C_i(S) - d_i|$. En sommant sur l'ensemble des tâches, on obtient la déviation totale de l'ordonnancment S. En interprétant les dates de fin d'un ordonnancement comme les dates de fin attendues des tâches, on peut exprimer la déviation d'un ordonnancement par rapport à un autre, et par extension la déviation d'un ordonnancement par rapport à un profil de préférences.

$$\Sigma D(S,P) = \sum_{V^k \in P} \sum_{i \in \mathcal{J}} |C_i(S) - C_i(V^k)|$$

La règle de ΣD retourne un ordonnancement de valeur $D(S,P)$ minimale, i.e. minimisant la somme des déviations avec le profil. Comme on l'a vu, ce critère peut s'interpréter comme une extension du critère de la déviation absolue issu de la théorie de l'ordonnancement. On peut également interpréter la règle d'agrégation obtenue comme une extension de la règle de Spearman [5] qui retourne un rangement de consensus. En effet, la règle de Spearman retourne le rangement r minimisant la somme des valeurs absolues des différences entre la position de chaque candidat dans r et dans les préférences du profil. Dans le cas particulier où toutes les tâches sont de longueur 1, la position d'une tâche et la date de fin sont équivalentes : la règle ΣD est alors la règle de Spearman.

Ce critère fait particulièrement sens dans un contexte comme celui de l'exemple 2 où l'on cherche à placer chaque tâche le plus près possible de sa position donnée par les votants. On pénalise alors les tâches qui commencent plus tôt que voulu par les agents.

2.3 Une extension de la règle de Kemeny : PTA-Kemeny

La règle de Kemeny [6] retourne le rangement r minimisant le nombre de désaccords sur les paires de candidats avec le profil (cette distance est appelée distance de Kendall-Tau). Pour chaque paire de candidats $\{a,b\}$, si a est placé avant b dans r, ce que l'on note $a \succ_r b$, alors pour toute préférence du profil dans laquelle b est placé devant a, on compte un désaccord.

$$\Delta^{KT}(S,P) = \sum_{V^k \in P} \sum_{\{a,b\} \in \mathcal{J}^2} \mathbb{1}_{a \succ_r b, b \succ_{V^k} a}$$

Cette règle est très étudiée en choix social car elle possède de nombreuses bonnes propriétés axiomatiques. En revanche, elle considère que tous les candidats sont semblables, ce qui est classique en choix social mais faux dans notre contexte. On propose donc d'adapter cette règle en pondérant les désaccords en fonction du temps d'exécution des tâches. Si la tâche a est placée avant la tâche b dans l'ordonnancement S, le désaccord est pondéré par le ratio $\frac{p_a}{p_a+p_b}$. Si b est placée avant a dans S, alors on pondère par $\frac{p_b}{p_a+p_b}$.

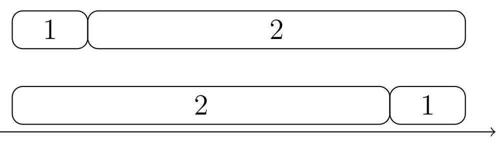
$$\Delta^{PTA-KT}(S,P) = \sum_{V^k \in P} \sum_{\{a,b\} \in \mathcal{J}^2} \mathbb{1}_{a \prec_r b, b \prec_{V^k} a} \times \frac{p_a}{p_a + p_b}$$

La règle de PTA-Kemeny (Processing Time Aware Kemeny) retourne un ordonnancement qui minimise le nombre de désaccords pondérés sur les paires de tâches, avec le profil.

Exemple 3 *On considère une instance à v votants et 2 tâches :*

$v/2 - 1$ votants

$v/2 + 1$ votants



La tâche 1 est très courte par rapport à la tâche 2 qui est à peine plus supportée que la tâche 1. La règle de Kemeny retourne l'ordonnancement $2 \succ 1$ car c'est l'ordonnancement préféré par la majorité des votants. En revanche, si les désaccords sont pondérés par la règle de PTA-Kemeny, le poids des désaccords pour l'ordonnancement $1 \succ 2$ est de $p_1/(p_1+p_2)$, ce qui est bien plus petit que $p_2/(p_1+p_2)$, l'ordonnancement $1 \succ 2$ sera donc retourné. Dans un contexte comme celui de l'exemple 1, PTA-Kemeny permet de trouver une solution tenant compte de l'approbation des votants et de la longueur des tâches.

3 Étude axiomatique

Dans cette section on considère plusieurs axiomes issus de la théorie du choix social classique [3] ainsi que certains axiomes spécifiques à notre contexte. On étudie notamment, parmi les axiomes standards :

— **Neutralité** (N). On considère que la règle r retourne un ordonnancement S lorsqu'elle est appliquée sur un profil P. Si on effectue une inversion des positions de deux tâches a et b dans toutes les préférences de P, pour obtenir un nouveau profil P', alors l'ordonnancement retourné par r lorsqu'elle est appliquée sur P' est similaire à S à l'exception que a et b ont inversé leurs positions.
— **Anonymat** (A). Aucun votant n'a un poids plus grand que celui les autres : en inversant les votes de deux votants quelconques, on obtient toujours le même résultat.
— **Renforcement** (R). Si un même ordonnancement S est retourné par la règle appliquée à deux sous-ensembles de votants distincts, alors la règle retourne S lorsqu'elle est appliquée sur l'union des deux sous-ensembles

En plus de ces axiomes on s'intéresse à un axiome déjà existant, spécifique aux ordonnancements collectifs : le *principe de PTA-Condorcet* (PTA-C) [7]. Dans le contexte de l'agrégation de préférences classique, le principe de Condorcet stipule que si un candidat a est placé devant un candidat b dans plus de la moitié des votes, alors a devrait être placé devant b dans le rangement retourné. Le principe de PTA-Condorcet étend le principe de Condorcet à des contextes où les tâches possèdent des longueurs différentes. Si toutes les tâches sont de même longueur, on retrouve le principe de Condorcet.

Définition 1 PTA-Condorcet [7]. *Un ordonnancement S respecte le principe de* PTA-Condorcet *pour un profil P si, pour toute paire de tâches (k, l), si $\frac{p_k}{p_k+p_l} \times v$ votants de P placent k avant l, alors S place k avant l. Une règle respecte le principe de PTA-Condorcet si elle retourne un ordonnancement respectant le principe de PTA-Condorcet, s'il en existe un.*

L'idée derrière cette extension est la suivante : plus une tâche est longue, plus elle devrait être largement supportée par les votants pour être placée tôt dans l'ordonnancement. On propose maintenant deux nouveaux axiomes : la *PTA-Neutralité* (PTA-N), une version affaiblie de la neutralité ainsi que la *monotonie sur la réduction du temps* (MRT).

Définition 2 PTA-Neutralité. *La règle r est* PTA-neutre *si, lorsque l'on effectue une inversion des positions de deux tâches a et b, telles que $p_a = p_b$, dans toutes les préférences de P, pour obtenir un nouveau profil P', alors l'ordonnancement retourné par r lorsqu'elle est appliquée sur P' est similaire à l'ordonnancement retourné par r sur P à l'exception que a et b ont inversé leurs positions.*

Lorsque toutes les tâches sont de mêmes longueur, la PTA-neutralité et la neutralité donnent les mêmes garanties. En revanches lorsque les longueurs sont variables, la PTA-neutralité assure uniquement que deux tâches de même longueur sont traités équitablement.

Définition 3 Monotonie sur la réduction du temps. *Soit P un profil de préférences et soit P' un profil similaire à P à l'exception qu'une tâche i est remplacée par une tâche i' avec $p_{i'} < p_i$. La règle r est* monotone sur la réduction du temps *si dans l'ordonnancement S' retourné par r lorsqu'elle est appliquée sur P', la tâche i' ne commence pas strictement plus tard que la tâche i dans l'ordonnancement retourné par r sur P.*

Cet axiome garantit qu'une tâche ne peut pas commencer plus tard parce qu'elle est plus courte. Il est très proche de l'axiome de *monotonie sur la réduction de prix* [8] utilisé dans le problème de budget participatif.

Finalement on s'intéresse aux relations de distance. Si une règle retourne un ordonnancement minimisant une distance, au sens mathématique, avec le profil de préférences, alors elle est *fondée sur une distance*. Une distance est une relation entre deux objets respectant 4 propriétés : non-négativité, symétrie, inégalité triangulaire et non identité des objets différents. Cette propriété n'est pas un axiome à part entière, mais être fondée sur une distance implique certaines propriétés axiomatiques comme le renforcement ou l'anonymat par exemple. Le tableau 1 récapitule les résultats axiomatiques que nous avons obtenus :

Règle	N	PTA-N	A	R	PTA-C	MRT	Distance
PTA-Kemeny	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗
$\sum T$	✗	✓	✓	✓ [7]	✗ [7]	?	✗
$\sum D$	✗	✓	✓	✓ [7]	✗	✗	✓

TAB. 1 – Axiomes respectés (✓) ou non (✗) par les règles de PTA-Kemeny, ΣT, et ΣD

On peut noter que la règle de PTA-Kemeny respecte le principe de PTA-Condorcet, le renforcement et la PTA-Neutralité. Les règles proposées jusqu'à maintenant respectaient soit le principe de PTA-Condorcet, soit le renforcement. Certains axiomes sont incompatibles, comme le montrent les propositions suivantes.

Proposition 1 *Toute règle respectant le principe de PTA-Condorcet n'est ni neutre ni fondée sur une distance.*

Proposition 2 *Toute règle neutre ou fondée sur une distance peut renvoyer un ordonnancement dont la somme des retards est arbitrairement éloignée de la somme des retards optimale.*

Ces deux résultats montrent que selon notre objectif, il peut être nécessaire d'abandonner les relations de distances et les règles neutres, qui sont deux propriétés classiques dans le contexte traditionnel du choix social. Nous nous intéressons maintenant aux propriétés computationnelles des règles présentées.

4 Complexité et algorithmes

La règle de PTA-Kemeny est une extension de la règle de Kemeny, qui est NP-difficile [1], elle est donc NP-difficile. Il existe des algorithmes exacts efficaces basés sur la programmation dynamique [2] adaptables en pondérant les désaccords en fonction de la taille des tâches.

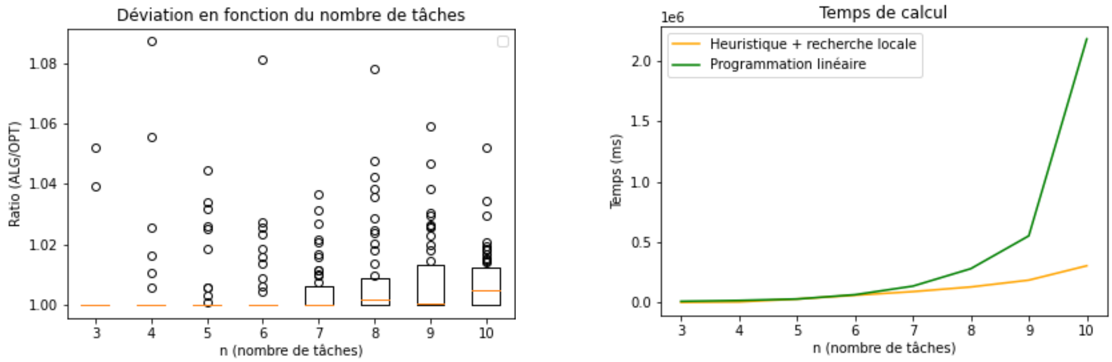
La règle de ΣT est NP-difficile au sens fort [7]. La programmation linéaire permet cependant de traiter des instances de taille raisonnable (20 tâches, 5000 votants).

Proposition 3 *La règle de* SIGMAD *est NP-difficile au sens fort.*

On prouve ce résultat par réduction du problème d'ordonnancement $(1||\sum D)$ qui est NP-difficile au sens fort [9]. Dans ce problème on cherche à trouver un ordonnancement sur une machine minimisant la somme des déviations absolues pour l'ensemble des tâches, étant donné un ensemble de dates d'échéance. Notons que la réduction n'est pas directe, les votants ayant pour une même tâche des dates d'échéances différentes.

On utilise la programmation linéaire pour résolution ce problème de manière exacte. Pour résoudre des instances de grande taille, on propose une heuristique polynomiale basée sur les dates de fin médianes des tâches. Pour chaque tâche, on calcule sa date de fin médiane dans le profil de préférences. On ordonnance ensuite les tâches par date de fin médiane croissantes. On complète cette heuristique par de la recherche locale, basée sur des échanges de tâches successives, et réalisable en temps polynomial. On évalue l'heuristique en terme de qualité de la solution et de temps de calcul. Pour cela, on étudie le rapport entre la déviation de l'ordonnancement obtenu avec l'heuristique et la déviation optimale. On compare également le temps de calcul de l'heuristique avec celui de la programmation linéaire.

Dans la figure 1a, la barre orange correspond à la valeur médiane observée du ratio entre déviation obtenue par l'heuristique et déviation optimale. Les boîtes correspondent aux quartiles, 75% des valeurs obtenues sont donc en-dessous du sommet de la boîte. Les points correspondent aux valeurs supérieures à la valeur de la boîte. Après application de la recherche locale, on arrive à des ordonnancements ayant en moyenne une somme des déviations 1% supérieure à l'optimal avec un temps de calcul inférieur à celui de la programmation linéaire.



(a) Ratio entre la déviation obtenue avec l'heuristique et la déviation optimale.

(b) Temps d'exécution de l'heuristique et de la programmation linéaire.

FIG. 1 – Résultats expérimentaux de l'heuristique.

Conclusion Nous avons proposé deux nouvelles règles d'agrégation pour le problème des ordonnancements collectifs, chacune faisant sens dans certains contextes. Nous avons étudié les propriétés axiomatiques des ces règles et de la règle ΣT à l'aide d'axiomes traditionnels mais également de nouveaux axiomes adaptés au problème. Ces règles résolvent des problèmes NP-difficiles, mais il est possible de résoudre des instances de taille raisonnable en utilisant des solveurs de programmation linéaire, et une heuristique efficace a également été proposée pour la règle de ΣD.

Comme perspective, il serait intéressant de caractériser axiomatiquement la règle de PTA-Kemeny pour savoir si, de la même façon que Kemeny est la seule règle respectant le principe de Condorcet, la neutralité et le renforcement, PTA-Kemeny est la seule règle respectant le principe de PTA-Condorcet, la PTA-neutralité et le renforcement. Il serait également intéressant d'étudier d'autres approches issues de l'ordonnancement afin de considérer d'autres contextes, dans lesquels les tâches ont des contraintes de précédence ou des dates de disponibilitées par exemple.

Références

[1] John Bartholdi, Craig A Tovey, and Michael A Trick. Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election. *Social Choice and welfare*, 6(2) :157–165, 1989.

[2] Nadja Betzler, Michael R Fellows, Jiong Guo, Rolf Niedermeier, and Frances A Rosamond. Fixed-parameter algorithms for kemeny scores. In *International Conference on Algorithmic Applications in Management*, pages 60–71. Springer, 2008.

[3] Felix Brandt, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, Jérôme Lang, and Ariel D Procaccia. *Handbook of computational social choice*. Cambridge University Press, 2016.

[4] Peter Brucker. *Scheduling Algorithms*. Springer, 5th edition, 2010.

[5] Persi Diaconis and Ronald L Graham. Spearman's footrule as a measure of disarray. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 39(2) :262–268, 1977.

[6] John G Kemeny. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88(4) :577–591, 1959.

[7] Fanny Pascual, Krzysztof Rzadca, and Piotr Skowron. Collective Schedules : Scheduling Meets Computational Social Choice. In *Seventeenth International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems* , Stockholm, Sweden, July 2018.

[8] Nimrod Talmon and Piotr Faliszewski. A framework for approval-based budgeting methods. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 33, pages 2181–2188, 2019.

[9] Long Wan and Jinjiang Yuan. Single-machine scheduling to minimize the total earliness and tardiness is strongly np-hard. *Operations Research Letters*, 41(4) :363–365, 2013.