Dominance ordinale avec interactions binaires : une étude axiomatique et algorithmique

Hugo Gilbert[1], Meltem Öztürk[1], Ariane Ravier[1], Olivier Spanjaard[2]
[1] Université Paris Dauphine, PSL Research University, Lamsade, CNRS, 75016 Paris, France
{hugo.gilbert, ariane.ravier}@dauphine.psl.eu, meltem.ozturk@lamsade.dauphine.fr
[2] Sorbonne Université, LIP6, CNRS, F-75005 Paris, France
olivier.spanjaard@lip6.fr

Mots-clés : *représentation de préférences, dominance ordinale, subset selection problem.*

1 Introduction

Le problème de *subset selection* consiste, à partir de préférences exprimées sur les individus d'une population, à sélectionner un sous-ensemble constitué d'un nombre donné de ces individus, de manière à obtenir un groupe performant [4]. Puisqu'il est contraignant de considérer que les préférences sur les individus sont exprimées numériquement, on préfère utiliser un profil de préférences ordinal, plus facile à exprimer par un décideur [1]. Une approche classique consiste à simplement sélectionner les meilleurs individus de la population. On observe cependant que cette approche ne tient pas compte de possibles interactions, positives ou négatives, entre les éléments. Certains modèles, comme l'intégrale de Choquet [2], permettent de tenir compte de ces interactions entre individus, mais ils sont fondés sur un profil de préférences cardinal, et sont par conséquent plus difficiles à appliquer dans un cadre concret.

Nos travaux se basent sur un modèle d'aggrégation additive proposé par Fishburn et LaValle [3], permettant de tenir compte des interactions binaires, et applicable à une étude ordinale. Nous procédons à une étude axiomatique et algorithmique du modèle, et présentons quelques résultats de simulation.

2 Le modèle à interactions binaires

Soit une population X, Fishburn et LaValle proposent un modèle cardinal permettant d'évaluer la performance d'un sous-ensemble de cette population en comptabilisant les interactions binaires, notées Δ, entre ses composantes. Ainsi, soit i, j deux individus dans X, on définit :

$$\Delta(ij) = u(ij) - u(i) - u(j). \tag{1}$$

L'utilité d'un sous-ensemble $S \subseteq X$ est alors définie par l'utilité de ses éléments ainsi que par leurs interactions binaires :

$$u(S) = \sum_{i \in S} u(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq S} \Delta(ij). \tag{2}$$

Un sous-ensemble $S \subseteq X$ surclasse un sous-ensemble $T \subseteq X$ si et seulement si $u(S) \geq u(T)$.

Soit $\mathcal{R}$ un ordre de préférences ordinal exprimé sur les éléments de X ainsi que sur les paires formées par ces éléments (dans le cadre de nos travaux, on suppose cet ordre strict). En s'appuyant sur l'équation (2) définissant l'utilité d'un sous-ensemble, Fishburn et LaValle introduisent la relation de dominance ordinale à interactions binaires, notée $\geq_D$, qui est vérifiée entre deux sous-ensembles S, T de X si S est au moins aussi bon que T pour toute fonction d'utilité en accord avec $\mathcal{R}$ (ensemble noté $U_{\mathcal{R}}$) :

$$S \geq_D T \Leftrightarrow \forall u \in U_{\mathcal{R}}, u(S) \geq u(T). \tag{3}$$

3 Résultats

Etude axiomatique Dans le but de caractériser le modèle à interactions binaires, on procède à une étude de ses propriétés axiomatiques. On s'intéresse dans un premier temps à des axiomes classiques en théorie du choix social, puis on propose des axiomes spécifiques au modèle, inférés de comportements qui lui sont propres.

On observe que la dominance ordinale à interactions binaires donne lieu à des résultats parfois contre-intuitifs, puisqu'il peut par exemple être plus avantageux de sélectionner un ensemble d'éléments dépréciés qu'un ensemble de bons éléments, si ces derniers ont des interactions négatives.

On observe également que l'utilité des paires que forment les éléments a un poids prépondérant dans l'évaluation d'un sous-ensemble, ce qui entraîne la violation d'axiomes classiques comme la monotonie, qui dit que la relation de dominance d'un ensemble A sur un ensemble B est conservée lorsque l'on accroît la préférence pour un élément de $A \setminus B$; ou l'indépendance, qui dit qu'ajouter un même élément à deux ensembles ne modifie pas la relation de dominance qui les régit.

Etude algorithmique En parallèle de l'étude axiomatique, on s'intéresse à la complexité algorithmique des problèmes liés au modèle à interactions binaires. On définit d'une part les sous-ensembles non-dominés, regroupés dans l'ensemble noté ND, tels qu'il n'existe pas d'autre ensemble de meilleure utilité à interactions binaires sur toute utilité respectant $\mathcal{R}$. D'autre part, regroupés dans l'ensemble noté PO, on étudie les ensembles dits potentiellement optimaux, pour chacun desquels on peut déterminer une fonction de $U_{\mathcal{R}}$ selon laquelle il n'existe pas d'autre ensemble d'utilité supérieure.

Si ces deux types de sous-ensembles sont liés, ils ne sont pas équivalents, et les problèmes associés sont de complexités potentiellement différentes. En effet, on montre que déterminer si un sous-ensemble est non-dominé est un problème NP-difficile, tandis que la question de la complexité à déterminer s'il est potentiellement optimal est encore ouverte.

On propose un algorithme glouton déterminant en temps polynomial un sous-ensemble non-dominé de taille donnée, ainsi qu'un algorithme permettant, en temps polynomial en la taille de $\mathcal{R}$, de déterminer un sous-ensemble non-dominé parmi les ensembles de taille inférieure ou égale à une taille fixée.

Résultats expérimentaux Afin de mieux évaluer la complexité de résolution en pratique des problèmes posés, on étudie la taille des ensembles ND et PO pour un ensemble X et une taille de sous-ensemble donnés, en simulant plusieurs milliers de relations $\mathcal{R}$. À valeurs fixées, on observe une grande hétérogénéité des résultats, particulièrement dans certains cas extrêmes. Cela nous mène à conclure que la complexité à déterminer la totalité des sous-ensembles non-dominés ou potentiellement optimaux dépend surtout de la configuration de la relation $\mathcal{R}$.

Références

[1] Edwin M. Bartee. Problem solving with ordinal measurement. *Management Science*, 17(10) :B622–B633, 1971.

[2] Gustave Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, 5 :131–295, 1954.

[3] Peter C. Fishburn and Irving H. LaValle. Binary interactions and subset choice. *European Journal of Operational Research*, 92(1) :182–192, 1996.

[4] Iris van Rooij, Ulrike Stege, and Helena Kadlec. Sources of complexity in subset choice. *Journal of Mathematical Psychology*, 49(2) :160–187, 2005.