Minimisation du délai moyen : relaxations et complexité

Camille Bonnin[1,2], Margaux Nattaf[1], Arnaud Malapert[2], Marie-Laure Espinouse[1]

[1] Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP[†] G-SCOP, 38000 Grenoble, France
{camille.bonnin, margaux.nattaf, marie-laure.espinouse}@grenoble-inp.fr
[2] Université Côte d'Azur, CNRS, I3S, France
arnaud.malapert@univ-cotedazur.fr

Mots-clés : *Optimisation, Ordonnancement à Une Machine, Complexité, Délai Moyen.*

Introduction. De nos jours, les problèmes d'ordonnancement sont omniprésents dans la société. Une méthode prometteuse pour les résoudre est la Programmation Par Contraintes (PPC), pour laquelle de nombreux travaux ont été menés [1]. Néanmoins, ces derniers ont longtemps été principalement tournés vers l'optimisation du délai total ($C_{\max}$), négligeant les autres fonctions objectif.

L'objectif de notre travail est d'améliorer la prise en compte de l'optimisation du délai moyen ($\sum C_j$) en PPC. Pour ce faire, nous allons utiliser des bornes inférieures et des relaxations afin d'identifier des problèmes polynomiaux sur lesquels baser notre approche. C'est cet état de l'art des complexités des problèmes à une machine minimisant $\sum C_j$ que nous présentons ici.

Complexité des problèmes à une machine minimisant $\sum C_j$. En PPC, il faut pouvoir calculer rapidement la borne inférieure la plus précise possible du problème que l'on cherche à résoudre. Afin que notre solution soit efficace, on cherche à conserver le plus possible les caractéristiques du problème lors du calcul de la borne. C'est pour cette raison que notre étude prend comme problème de base $1|r_j; d_j; prec|\sum C_j$, qui est un problème assez général. Ce dernier étant $\mathcal{NP}$-difficile, cette étude se focalise sur ses relaxations pour identifier des problèmes polynomiaux prometteurs pour la PPC.

Les résultats de cette étude bibliographique sont résumés par la figure 1. Dans cette figure, les relaxations seules sont représentées par des flèches en pointillés, celles qui sont aussi des réductions par des flèches épaisses, les problèmes polynomiaux sont en bleu et ceux $\mathcal{NP}$-difficiles en mauve. Les problèmes préemptifs sont encadrés en pointillés. Pour des questions de lisibilité, la figure est incomplète et seules les relaxations et les réductions sur lesquelles s'appuient notre argumentaire sont présentes.

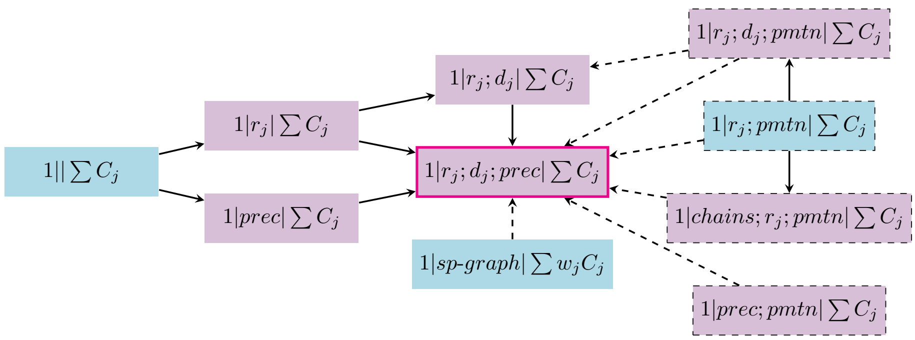

FIG. 1 – Complexité des relaxations et réductions de $1|r_j; d_j; prec|\sum C_j$

En nous appuyant sur cette figure, nous pouvons faire plusieurs observations. Tout d'abord, notre problème de départ, $1|r_j; d_j; prec|\sum C_j$ est $\mathcal{NP}$-difficile car deux de ses réductions,

[†]Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes

$1|r_j|\sum C_j$ [6] et $1|prec|\sum C_j$ [5], sont $\mathcal{NP}$-difficiles. Ensuite, on peut immédiatement remarquer que le problème sans contrainte, $1||\sum C_j$, est une première relaxation polynomiale [2] de $1|r_j;d_j;prec|\sum C_j$ et est donc, comme les autres relaxations polynomiales, potentiellement intéressante pour l'étude sur la prise en compte de $\sum C_j$ en PPC.

Dans un second temps, on peut remarquer que le seul fait d'avoir des contraintes de précedence de forme quelconque ($1|prec|\sum C_j$) implique que le problème est $\mathcal{NP}$-difficile [5]. De plus, [2] fait remarquer que sans r_j, les solutions optimales de la version non-préemptive d'un problème avec un objectif linéaire comme $\sum C_j$ sont toujours optimales pour la version préemptive du problème. Toutefois, on peut noter que le fait de contraindre le graphe des précédences à être de la famille des graphes série-parallèles suffit à rendre le problème polynomial s'il s'agit de la seule contrainte du problème [2]. Ainsi $1|sp\text{-}graph|\sum w_jC_j$ est la deuxième relaxation polynomiale de $1|r_j;d_j;prec|\sum C_j$ à se dégager de cette étude.

Enfin, une troisième observation est l'intérêt pour la complexité d'autoriser la préemption dans certains cas. En effet, cette dernière permet de faire passer le problème avec des dates de disponibilités, $1|r_j|\sum C_j$, qui est $\mathcal{NP}$-difficile [6] au problème polynomial qu'est $1|r_j;pmtn|\sum C_j$ [2]. Ce problème préemptif est ainsi la troisième relaxation polynomiale de $1|r_j;d_j;prec|\sum C_j$ à se dégager de cette étude.

Néanmoins, malgré la préemption, il n'est pas possible de rajouter des dates d'échéance ($1|r_j;d_j;pmtn|\sum C_j$ [3]) ou même la plus simple des contraintes de précédences ($1|chains;r_j;pmtn|\sum C_j$ [4]) au problème $1|r_j;pmtn|\sum C_j$ sans devenir $\mathcal{NP}$-difficile.

Conclusion. Nous avons réussi à identifier trois problèmes polynomiaux potentiellement prometteurs pour l'approche PPC des problèmes à une machine avec minimisation de $\sum C_j$: $1||\sum C_j$, $1|sp\text{-}graph|\sum w_jC_j$ et $1|r_j;pmtn|\sum C_j$. Toutefois, $1||\sum C_j$, n'ayant pas la contrainte r_j, la valeur optimum de son objectif est la même que celle de sa version préemptive [2] qui est une relaxation de $1|r_j;pmtn|\sum C_j$ et est donc moins général que ce dernier. Par conséquence, l'étude de $1||\sum C_j$ n'est pas pertinente dans notre contexte. Les deux autres problèmes, $1|sp-graph|\sum w_jC_j$ et $1|r_j;pmtn|\sum C_j$ ont des ensembles de contraintes différents et sont donc deux pistes d'étude différentes pour la prise en compte de $\sum C_j$ en PPC. Il serait d'ailleurs intéressant de comparer les résultats obtenus par ces deux approches.

Références

[1] Philippe Baptiste, Claude Le Pape and Wim Nuijten. *Constraint-Based Scheduling : Applying Constraint Programming to Scheduling Problem.* International Series in Operations Research & Management Science, Vol. 39, p. xiii–198, Verlag Springer US, 2001.

[2] Peter Brucker. *Scheduling Algorithms.* Chap. 4, pp. 61–106, Springer, 2006.

[3] Jian Zhong Du and Joseph Y.-T. Leung. *Minimizing mean flow time with release time and deadline constraints.* Journal of Algorithms, Vol. 14, No. 1, Elsevier, p. 45–68 1993.

[4] Jan K. Lenstra. `http://schedulingzoo.lip6.fr/ref2bibtex.php?ID=Lenstra::`, 2015.

[5] Jan K. Lenstra, Alexander H. G. Rinnooy Kan. *Complexity of Scheduling under Precedence Constraints.* Operations Research, Vol. 26, INFORMS, p. 22–35, 1978.

[6] Jan K. Lenstra, Alexander H. G. Rinnooy Kan, Peter Brucker. *Complexity of machine scheduling problems.* Annals of discrete mathematics, Vol. 1, Elsevier, p. 343–362, 1977.