Analyse d’une classe particulière de problèmes à une machine avec fonctions temporelles singulières de type exponentiel

F. Guégnard[1]

[1] Univ. Angers, LARIS, IUT Angers-Cholet, F-49000 Angers, France
frederic.guegnard@univ-angers.fr

Mots-clés *: Ordonnancement, problèmes à une machine, fonctions exponentielles.*

1 Introduction

Nous nous limiterons à l’étude d’une classe particulière des problèmes d’ordonnancement : les problèmes à une machine dans lesquels les durées d’exécution des tâches ne sont plus des constantes mais dépendent du temps [1]. Nous utiliserons les notations définies dans [2]. Suivant cette notation, nous nous intéressons aux problèmes $1 \mid p_i(t) \mid C_{\max}$ dans lequel un ensemble $I = \{1,..,n\}$ de tâches doivent être ordonnancées sur une unique machine. Chaque tâche a une durée qui dépend donc de l’instant à laquelle elle débute. La complexité des problèmes $1 \mid p_i(t) \mid C_{\max}$ dépend de la nature des fonctions temporelles.

Nous appelons ordre optimal l’ordre dans lequel les tâches sont affectées sur l’unique machine qui minimise la somme des durées d’exécution de toutes les tâches.

Le but de cet article est de considérer les problèmes suivants : $1 \mid p_i(t) = b + (a-b).e^{-\lambda_i.t} \mid C_{\max}$ dans lesquels, les fonctions temporelles sont de type exponentiel avec la singularité d’avoir toujours la même valeur initiale *a* et la même valeur finale *b* mais une décroissance différente dépendant du paramètre λ_i (avec $\lambda_i \in \left]0,1\right[$). Dans le cas de ces fonctions exponentielles, la valeur initiale positive est : $p_i(0) = b + (a-b).e^{-\lambda_i.0} = a$ ($a > 0$) et la valeur finale positive est : $\lim_{p \to \infty} p_i(t) = b$ ($b > 0$). Nous reprenons l’écriture et la description de ces problèmes tels qu’ils ont été définis dans [3]. Ces problèmes ouverts n’ont pas de résultats en termes de complexité.

Notre démarche consiste à étudier la contrainte disjonctive entre 2 tâches *i* et *j* afin de définir un ensemble de contraintes de précédence. Pour cela, nous écrivons mathématiquement cette contrainte et nous essayons d’en extraire le maximum d’informations : à savoir l’écriture d’une contrainte de précédence dépendant du temps et la détermination d’une « date pivot » t^* (date à partir de laquelle ordonnancer *j* avant *i* devient plus long que d'ordonnancer *i* avant *j*) :

$$i \xrightarrow{[0\,;\,t^*]} j \quad \text{ou} \quad i \xrightarrow{[t^*\,;\,+\infty]} j$$

Cette démarche nous permettra dans un deuxième temps (non présenté dans cet article) de proposer une démarche complémentaire qui consiste en la construction d’un graphe temporel complet tel qu’il a été défini dans [4]. Un chemin dans ce graphe correspondra alors à une solution réalisable du problème initial.

Nous pouvons rencontrer ces cas aussi bien en électronique (décharge d’un condensateur) que dans d’autres domaines de la physique (radioactivité, phénomène de relaxation) ou toute autre réponse d’un système obéissant à une loi différentielle du 1er ordre [5].

2 Les problèmes $1 | p_i(t) = b + (a-b).e^{-\lambda_i.t} | C_{\max}$

2.1 Ecriture mathématiques de la problématique

Considérons deux tâches i et j et notons leur durée d'exécution par les fonctions temporelles suivantes : $p_i(t) = b + (a-b).e^{-\lambda_i.t}$ et $p_j(t) = b + (a-b).e^{-\lambda_j.t}$. Nous formulons l'hypothèse que $\lambda_i < \lambda_j$ (si ce n'est pas le cas, on renumérote les deux tâches). Pour ordonnancer ces deux tâches, deux cas sont alors envisageables : la tâche i est ordonnancée avant la tâche j, et on note $p_{i->j}(t)$ la date de fin de la tâche j, ou la tâche j est ordonnancée avant la tâche i, et on note $p_{j->i}(t)$ la date de fin de la tâche i. On note $p(t) = p_{j->i}(t) - p_{i->j}(t)$, la différence entre les deux expressions. On peut alors écrire : $p(t) = (a-b).\left[e^{-\lambda_j.t} - e^{-\lambda_i.t}\right] + (a-b).\left[e^{-\lambda_i.\left(t+b+c.e^{-\lambda_j.t}\right)} - e^{-\lambda_j.\left(t+b+c.e^{-\lambda_i.t}\right)}\right]$.

2.2 Méthodes de résolution proposées

Le but de nos travaux est alors d'étudier les variations de cette fonction $p(t)$ en fonction des paramètres a, b et λ. Dans le cas général, c'est-à-dire sans aucune relation d'ordre entre ces paramètres, nous montrons dans un premier temps l'existence d'une « date pivot », notée t^*, et dans un deuxième temps nous déterminons numériquement la valeur de t^*. Nous avons envisagé deux méthodes : la première classique par dichotomie de l'intervalle de recherche et la deuxième axée sur la décomposition en séries entières des fonctions exponentielles.

3 Conclusions et perspectives

La poursuite de nos travaux sur le problème $1 | p_i(t) = b + (a-b).e^{-\lambda_i.t} | C_{\max}$ s'inscrit selon deux axes. Dans un premier temps, nous désirons poursuivre l'étude analytique des fonctions temporelles de type exponentiel et ainsi déterminer la vraie valeur mathématique de la « date pivot » t^*. Il sera alors possible d'apporter des compléments sur la complexité de ce problème. Dans un deuxième temps, nous voulons également nous intéresser aux problèmes $1 | p_i(t) = b_i + (a_i - b_i).e^{-\lambda_i.t} | C_{\max}$ à la fois en termes de complexité et de techniques de résolution en adoptant le même schéma directeur que celui présenté dans cet article. Enfin, nous souhaitons rassembler l'ensemble de ces informations dans un graphe temporel complet afin de pouvoir obtenir une solution réalisable à ce problème.

Références

[1] S. Gawiejnowicz. *Time-Dependent Scheduling*. Springer-Verlag, 2008.

[2] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys. Sequencing and scheduling : algorithms and complexity. *Centrum voor wiskunde in informatica*. Report BS-R8909. 1989.

[3] F. Guégnard, F. Bousseau, M. Bourcerie. Problèmes à une machine avec fonctions temporelles : état de l'art et derniers avancements. *CNR IUT*, 2010.

[4] R. Dechter, I. Meiri, J. Pearl. Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence* : vol. 49, 61-95, 1991.

[5] S. Guerre-Delabriere, M. Postel. *Méthodes d'approximations, Equations différentielles, Applications Scilab*. Ellipses, 111-117, 2004.