Distance d'édition minimum à un linegraph

Dominique Barth[1], Dimitri Watel[2], Marc-Antoine Weisser[3]

[1] DAVID, UVSQ, Versailles
[2] ENSIIE, SAMOVAR, Evry
[3] LISN, Centrale Supélec, Gif sur Yvette

Mots-clés : *Distance d'édition, Linegraph, Hypergraphe, Couverture de graphe par des cliques, Complexité paramétrée*

1 Présentation du problème étudié

On se propose dans cette présentation d'étudier le problème de la distance d'édition entre un graphe et l'ensemble des linegraphs. Un *linegraph* ou *graphe des arêtes* est un graphe non orienté obtenu à partir d'un autre graphe non orienté. Connaissant un graphe $G = (V, E)$ (simple ou non), le linegraph de G est un graphe H simple possédant un nœud v_e pour chaque arête e de G et une arête relie v_e et v_f si les arêtes e et f sont incidentes au même nœud dans G. Cette définition peut se généraliser aux hypergraphes, où chaque nœud de H représente une hyperarête et chaque arête indique si deux hyperarêtes ont une intersection non vide.

La *distance d'édition* est une mesure classique utilisée pour mesurer la proximité d'un graphe non orienté à un autre graphe ou une classe de graphes (comme exemple de classe, on peut citer les graphes planaires, les linegraphs, les graphes sans diamant induit, ...). La distance est le nombre minimum de corrections qu'il faut apporter à un graphe pour que le graphe résultat appartienne à la classe en question. Les corrections sont de natures variées. On considère généralement l'ajout et la suppression d'arêtes ou de nœuds. Ce problème a été abondamment étudié pour de nombreuses classes, notamment sa complexité paramétrée vis-à-vis de la distance recherchée [1]. Dans cette étude on s'intéressera à la classe des linegraphs et à l'ajout et la suppression d'arêtes. La figure 1 présente un exemple de distance d'un graphe aux linegraphs.

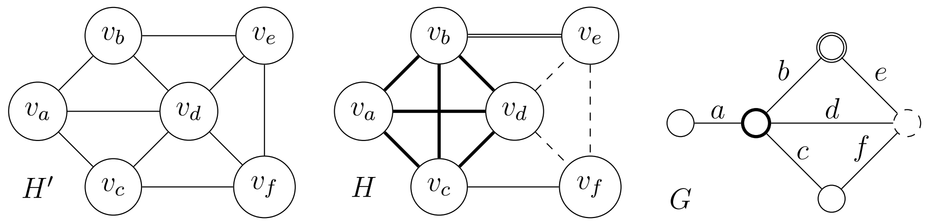

FIG. 1 – Le graphe H' à gauche n'est pas un linegraph, mais est à une distance d'édition 1 d'un linegraph, par exemple H qui est le linegraph de G. Les décorations des arêtes de H et des nœuds de G sont une couverture en clique de H, introduite dans la section 3.

2 Motivation

Dans les vieux immeubles, du fait d'un manque de documentation suffisante, il peut être difficile de connaître le plan des réseaux encastrés dans les murs (par exemple les réseaux électriques ou de plomberie). Une solution consiste à déterminer les interactions qui existent entre les liens apparents du réseau. Ces mesures donnent une probabilité que deux arêtes du réseau soient incidentes au même nœud, ce qui permet de construire le linegraph du réseau.

Cependant, les mesures n'étant pas parfaites, le graphe résultat n'est généralement pas un linegraph. Une correction est alors appliquée, en minimisant la distance d'édition à un linegraph. La motivation concernant l'extension aux hypergraphes est à ce jour purement théorique.

3 Caractérisation des linegraphs

Il existe une caractérisation sous forme de couverture en cliques des linegraphs. Un graphe H est le linegraph d'un graphe simple si et seulement si on peut couvrir les arêtes de H avec des cliques de sorte qu'un nœud appartienne à au plus deux cliques et chaque arête à au plus une clique. Cette propriété se généralise au cas où le graphe G n'est pas simple en supprimant la contrainte sur les arêtes [3]. La figure 1 présente une exemple de couverture d'un linegraph. Elle se généralise aussi aux hypergraphes (et étend la caractérisation présentée dans [4]) : un graphe H est un linegraph d'un hypergraphe où les hyperarêtes contiennent au plus p nœuds et où l'intersection de deux hyperarêtes contient au plus q nœuds si on peut couvrir les arêtes de H avec des cliques de sorte qu'un nœud appartienne à au plus p cliques et chaque arête à au plus q cliques. On note $\mathcal{C}_{pq}$ cette classe de graphes. On peut noter que $\mathcal{C}_{11}$ est une classe spéciale contenant des graphes qui sont un ensemble de cliques disjointes et qui correspondent aux linegraphs d'une union d'étoiles. Déterminer l'appartenance d'un graphe à $\mathcal{C}_{pq}$ est polynomial si $p \leq 2$ [4, 6] mais NP-Difficile si $p = q \geq 4$ ou $p = 3$ et $q = 1$ [7].

On s'intéresse au problème **(DIST)** : Soit $p \geq q$, $k \in \mathbb{N}$ et un graphe simple H, peut-on transformer H en un graphe de $\mathcal{C}_{pq}$ en ajoutant ou supprimant au plus k arêtes de H ?

On note DIST_{pq} le problème DIST restreint à des valeurs fixées de p et q. En particulier DIST_{11} est un problème connu sous le nom de *Cluster Editing* [5]. En généralisant la preuve de NP-Complétude de ce problème [5], nous pouvons montrer que DIST_{pq} est NP-Complet pour toute valeur de p et q. Une première partie de nos contributions concerne la complexité paramétrée vis-à-vis de k du problème DIST. L'appartenance de DIST_{11} à la classe FPT est un résultat classique de recherche arborescente bornée [2] que l'on peut généraliser pour DIST_{pq} si $p \leq 2$. A l'inverse, la NP-Complétude de l'appartenance à $\mathcal{C}_{31}$ et $\mathcal{C}_{pp}$ pour $p \geq 4$ permet de montrer immédiatement que DIST_{pq} pour $p \geq 4$ et $q \geq 4$ et DIST_{p1} pour $p \geq 4$ sont NP-Complets même si $k = 0$. Nous avons étendu ces résultats aux problèmes DIST_{p2} pour $p \geq 3$. Les complexités de l'appartenance à la classe $\mathcal{C}_{p3}$ et de DIST_{p3} pour $p \geq 3$ sont ouvertes.

La seconde partie de notre contribution consiste en la preuve que DIST est FPT vis-à-vis de la largeur arborescente de H et de p. La difficulté de cette preuve réside dans le fait de montrer que la taille des cliques couvrant le linegraph le plus proche de H ne dépend que de ces paramètres. Cette propriété permet d'éviter l'explosion combinatoire lors de la recherche.

Références

[1] Christophe Crespelle. Survey on graph algorithms parameterized by edge edit distances. (749022), 2020.

[2] M Cygan, FV Fomin, L Kowalik, D Lokshtanov, D Marx, Ma Pilipczuk, Mi Pilipczuk, and S Saurabh. *Parameterized Algorithms.* Springer, Cham, 2015.

[3] F Harary. Line Graphs. In *Graph Theory*, chapter 8. Addison Wesley, 1972.

[4] Ramin Javadi, Zeinab Maleki, and Behnaz Omoomi. Local Clique Covering of Graphs. 2012.

[5] Christian Komusiewicz and Johannes Uhlmann. Cluster editing with locally bounded modifications. *Discrete Applied Mathematics*, 160(15) :2259–2270, 2012.

[6] Philippe G. H. Lehot and Philippe G. H. An Optimal Algorithm to Detect a Line Graph and Output Its Root Graph. *Journal of the ACM*, 21(4) :569–575, oct 1974.

[7] Svatopluk Poljak, Vojtěch Rödl, and Daniel Turzík. Complexity of representation of graphs by set systems. *Discrete Applied Mathematics*, 3(4) :301–312, 1981.