Sur la complexité de tournées avec transitions obligatoires

Christian Laforest, Timothée Martinod

Université Clermont Auvergne, CNRS, Mines de Saint-Étienne, Clermont-Auvergne-INP, LIMOS, 63000 Clermont-Ferrand, France

{christian.laforest,timothee.martinod}@uca.fr

Mots-clés : *complexité, graphes, tournée de véhicules, hamiltonien.*

Problématique. Dans un graphe $G = (V, A)$, une tournée est un parcours $P = u_0, \ldots, u_{k-1}$ tel que pour chaque succession $u_i, u_j \in P$, l'arc $(u_i u_j) \in A$. Le problème de la tournée est défini par un nombre de sources (zéro, une ou plusieurs), un nombre de cibles (une ou plusieurs) et un nombre de tournées à construire (une ou plusieurs). Les *sources* sont les sommets de départ des parcours. Les *cibles* sont des sommets devant appartenir à au moins une des tournées recherchées. Nous étudions ici une variante de ce problème classique. Pour l'exprimer, nous ajoutons à l'instance d'entrée un ensemble $\Pi = \{T_1, \ldots, T_l\}$. Chaque élément T_i de Π est appelé une *transition obligatoire*. Nous dirons qu'une tournée $P = u_0, \ldots, u_{k-1}$ de G *respecte* la transition obligatoire $T_i = \; >a,b,c>$ si $\forall j = 0, \ldots, k-3 : (u_j = a, u_{j+1} = b) \implies u_{j+2} = c$. Une tournée P de G *respecte* les transitions obligatoires Π si P respecte chaque transition obligatoire qu'elle contient.

Contexte. Les problèmes de transport et de logistique forment un domaine de recherche très actif. Ils ont dû être résolus bien avant que les ordinateurs et la recherche opérationnelle (RO) ne deviennent disponibles pour soutenir la prise de décision, et continuent à bénéficier de nombreuses contributions [4, 5]. Le problème de la tournée de véhicules est abordé sous de nombreux angles (la continuité du service, le profit, l'équité, avec des fenêtres de temps, des véhicules autonomes, une réponse à la demande, etc.). Nous abordons ici la question des panneaux de signalisation contraignant l'itinéraire lors d'une intersection. Nous modélisons ces situations à l'aide d'obligations.

L'étude de problèmes de graphes classiques avec des contraintes supplémentaires n'est pas nouvelle. Récemment, la notion de "conflit" a été introduite : à un graphe $G = (V, E)$, est ajouté un ensemble de paires d'éléments de G (sommets ou arêtes) qui ne peuvent *pas* appartenir à la même solution (une solution peut être un chemin, un arbre, un ensemble dominant, etc. selon l'objectif). À l'opposé des obligations, un conflit modélise le fait que deux éléments d'un système ne peuvent pas être utilisés simultanément, par exemple parce qu'ils sont incompatibles. La plupart des problèmes avec conflits sont difficiles. Voici quelques publications récentes sur le sujet : [1, 2, 6, 7, 9].

La notion d'obligation a initialement été introduite dans [3] ; elle peut aider à modéliser des situations dans lesquelles les éléments doivent être mobilisés non pas individuellement mais collectivement (équipe de personnes, ensemble de ressources, etc.). Dans un article récent, les obligations sont formées par des groupes de sommets devant appartenir aux mêmes solutions du problème de l'indépendant dominant [8]. Dans le cas des problèmes de tournées de véhicules, ces obligations modélisent les situations où plusieurs routes existent, mais l'une d'entre elles doit obligatoirement être empruntée (en cas de "panneau d'obligation de tourner à droite" par exemple). Elles sont formées par la succession de deux arcs ou arêtes.

Résultats. Nos principaux résultats ici sont les suivants. Nous proposons dans un premier temps un algorithme polynomial pour construire le plus court chemin entre deux sommets d'un

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence Nationale de la Recherche au titre du programme "Investissements d'Avenir" dans le cadre du Laboratoire d'Excellence IMobS3 (ANR-10-LABX-0016) et de l'Initiative d'Excellence IDEX-ISITE CAP 20-25 (ANR-16-IDEX-0001).

graphe avec des transitions obligatoires. Nous montrons que déterminer la longueur minimale d'un parcours respectant les transitions obligatoires à partir d'une source, passant par c cibles données en entrée est non-approximable pour toute constante, même dans le graphe complet à n sommets K_n. De même, déterminer la longueur minimale d'un tel parcours passant par tous les sommets du graphe est non-approximable pour toute constante, même dans K_n. Le résultat précédent est étendu à la recherche d'un parcours hamiltonien (i.e. chaque sommet est parcouru une et une seule fois) suivant les mêmes conditions. Nous avons procédé à des réductions à partir du problème *Restricted Exact Cover by 3-Sets* (*RX3C*) pour montrer ces non-approximations. Ses données sont un ensemble d'éléments $\mathcal{X}$ et une collection $\mathcal{C}$ de triplets de $\mathcal{X}$. Une solution au problème *RX3C* est une sous-collection $C' \subset \mathcal{C}$ telle que chaque élément de $\mathcal{X}$ apparaît exactement une fois dans les triplets de C'.

Nous montrons également que, pour toute constante $x \in \mathbf{N}^+$, déterminer s'il existe un cycle élémentaire, respectant les transitions obligatoires, de taille au moins $\sqrt[x]{n} > 4$ est $\mathcal{NP}$-complet même dans K_n. La preuve s'appuie sur une réduction du problème du cycle élémentaire sans transitions obligatoires. Nous montrons aussi qu'aucun algorithme ne peut garantir de trouver un cycle élémentaire de taille supérieure à deux (resp. trois) dans un graphe complet K_n orienté (resp. non orienté).

Perspectives. Les résultats précédents sont obtenus en ajoutant des transitions obligatoires sur une grande majorité des arcs ou arêtes du graphe, ou en formant des cycles, afin d'interdire certaines transitions. Par exemple, l'utilisation d'un arc (u, v) est proscrit par les transitions obligatoires *>u,v,u>* et *>v,u,v>*, les autres sommets du graphe ne pouvant plus être atteints si (u, v) appartient à une solution. Nous étudierons ainsi l'impact du nombre de transitions obligatoires, et de la topologie du graphe induit par celles-ci, sur la complexité des problèmes de tournées.

Références

[1] Alexis Cornet and Christian Laforest. Total domination, connected vertex cover and steiner tree with conflicts. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 19(3), 2017.

[2] Alexis Cornet and Christian Laforest. Domination problems with no conflicts. *Discret. Appl. Math.*, 244 :78–88, 2018.

[3] Alexis Cornet and Christian Laforest. Graph problems with obligations. In *Combinatorial Optimization and Applications*, volume (LNCS) 11346, pages 183–197, Cham, 2018. Springer International Publishing.

[4] N. Agatz et al. The vehicle routing problem : Latest advances and new challenges. *Springer US*, 2008.

[5] M. Grazia Speranza. Trends in transportation and logistics. *European Journal of Operational Research*, 264(3) :830–836, 2018.

[6] Mamadou Moustapha Kanté, Christian Laforest, and Benjamin Momège. An exact algorithm to check the existence of (elementary) paths and a generalisation of the cut problem in graphs with forbidden transitions. In *SOFSEM 2013 Proceedings*, volume 7741 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 257–267. Springer, 2013.

[7] Mamadou Moustapha Kanté, Fatima Zahra Moataz, Benjamin Momège, and Nicolas Nisse. Finding paths in grids with forbidden transitions. In *41st International Workshop, WG 2015*, volume 9224 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 154–168. Springer, 2015.

[8] Christian Laforest and Timothée Martinod. On the complexity of independent dominating set with obligations in graphs. *Theoretical Computer Science*, 2021.

[9] Christian Laforest and Benjamin Momège. Some hamiltonian properties of one-conflict graphs. In *25th International Workshop, IWOCA 2014*, volume 8986 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 262–273. Springer, 2014.