Evolution de population par descente de gradient pour la coloration de graphe

Olivier Goudet, Béatrice Duval, Jin-Kao Hao

LERIA, Université d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers, France

{olivier.goudet,beatrice.duval,jin-kao.hao}@univ-angers.fr

Mots-clés : *résolution de problème ; apprentissage ; heuristique ; descente de gradient ; coloration de graphes.*

1 Introduction

Les problèmes de coloration sont des modèles très utilisés pour formuler un grand nombre de problèmes pratiques qui apparaissent dans de nombreux domaines [2]. Étant donné un graphe non-orienté $G = (V, E)$ avec un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E, une coloration légale d'un tel graphe est une partition de l'ensemble de sommets V en k différents groupes de couleurs (aussi appelés ensembles indépendants) telle que deux sommets adjacents soient dans des groupes de couleurs différents.

Le problème de coloration le plus étudié, nommé GCP (*Graph Coloring Problem*), consiste à déterminer le nombre chromatique d'un graphe, c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs requis pour colorier ce graphe de façon légale. Si on ajoute en plus une contrainte d'équité, on aborde alors le problème nommé ECP (*Equitable graph Coloring Problem*) qui consiste à trouver une solution légale avec un nombre minimum de couleurs utilisées, mais aussi telle que les tailles des différents groupes de couleurs soient à peu près de la même taille (avec une différence de taille au plus de 1).

En terme de complexité, les problèmes de coloration de graphe GCP et ECP sont NP-difficiles. Etant donné leur importance théorique et pratique, ces problèmes ont été étudiés intensivement dans la littérature et de nombreuses heuristiques ont été proposées dont l'algorithme mémétique HEAD [3] et le recuit simulé quantique QA-COL [5] qui sont parmi les meilleurs. Le meilleur algorithme pour le problème ECP est un algorithme mémétique appelé MAECP [4].

Les études menées sur la coloration sont en général dédiées à un problème de coloration spécifique. Ainsi, il est souvent difficile de généraliser une méthode conçue pour un problème de coloration particulier à d'autres problèmes de coloration. Dans ce travail, nous souhaitons proposer un nouveau type d'heuristique qui pourrait être utilisé pour différents problèmes de coloration de graphes.

2 Evolution de population par descente de gradient

Nous introduisons un nouveau cadre de résolution pour les problèmes de coloration de graphes [1]. Tout d'abord, nous formulons le problème de coloration sous-jacent comme un problème d'optimisation continue de façon à pouvoir appliquer des techniques de descente de gradient qui sont très utilisées actuellement notamment pour optimiser des réseaux de neurones profonds.

De façon plus précise, l'idée est de représenter une coloration d'un graphe par une matrice de poids réels, dans laquelle chaque entrée correspond à la propension apprise de chaque sommet à recevoir chaque couleur. Ensuite, une méthode de descente de gradient est utilisée de façon à améliorer une population de solutions candidates (ou individus) en minimisant une fonction de perte globale. Cette fonction de perte globale est conçue de façon à guider efficacement la recherche. Pour être informative, elle intègre différents termes : un terme de *fitness* mesurant la qualité des solutions candidates, un terme de pénalisation décourageant les différentes solutions candidates de répéter les mêmes erreurs, et enfin un terme de bonus qui pour sa part encourage les individus à partager des affectations de couleur correctes. Pour résoudre ce problème, les matrices de poids de tous les individus de la population sont agrégées dans un unique tenseur tridimensionnel. Le problème est ensuite résolu par descente de gradient et les calculs tensoriels sont faits en parallèle sur un GPU (*Graphics Processing Unit*). L'algorithme proposé pour les problèmes GCP et ECP s'appelle TensCol.

3 Résultats expérimentaux

Pour le problème GCP, TensCol est évalué sur les 36 instances de graphe les plus difficiles provenant de la deuxième compétition DIMACS. Pour le problème ECP, nous utilisons l'ensemble de 73 instances testées dans [4] et provenant des compétitions DIMACS et COLOR02.

Pour le GCP, TensCol retrouve toujours les meilleurs solutions connues pour les instances avec moins de 200 sommets. Pour les graphes de taille moyenne, jusqu'à 500 sommets, il est compétitif par rapport aux autres algorithmes de l'état de l'art. Pour les instances aléatoires de grande taille comme DSJC1000.5.col et DSJC1000.9.col, TensCol est moins bon que les deux meilleurs compétiteurs HEAD [3] et QA-COL [5]. Cependant, TensCol fonctionne très bien pour toutes les instances de graphes géométriques en retrouvant à chaque fois les meilleurs résultats connus en un temps limité. En particulier, TensCol retrouve la coloration avec 234 couleurs pour l'instance très difficile du grand graphe R1000.5.col, qui n'est pas atteinte par les meilleurs compétiteurs HEAD [3] et QA-COL [5].

Pour le problème ECP, TensCol produit de très bons résultats , en particulier pour les grands graphes entre 900 et 2000 noeuds. Il a permis notamment d'établir 8 nouveaux records (nouvelles bornes) qui n'avaient jamais été trouvées jusque là. Ces nouveaux records sont répertoriés dans la table 1 ci-dessous.

Instance	$\|V\|$	plus petit nombre de couleurs connu jusqu'à présent	nouveau record	Amélioration
DSJR500.5.col	500	124	122	-2
DSJC1000.5.col	1000	95	92	-3
R1000.5.col	1000	247	239	-8
flat1000_60.0.col	1000	93	92	-1
flat1000_76.0.col	1000	93	91	-2
latin_square_10.col	900	103	102	-1
C2000.5.col	2000	183	172	-9
C2000.9.col	2000	468	431	-37

TAB. 1 – Nouveaux records obtenus pour la coloration équitable (ECP). Certaines améliorations sont très importantes avec des gains de 8, 9 et 37 couleurs.

Références

[1] Olivier Goudet, Béatrice Duval, and Jin-Kao Hao. Population-based gradient descent weight learning for graph coloring problems. *Knowledge-Based Systems*, 212 :106581, 2021.

[2] Rhyd Lewis. *A Guide to Graph Colouring - Algorithms and Applications*. Springer, 2016.

[3] Laurent Moalic and Alexandre Gondran. Variations on memetic algorithms for graph coloring problems. *Journal of Heuristics*, 24(1) :1–24, 2018.

[4] Wen Sun, Jin-Kao Hao, Wenyu Wang, and Qinghua Wu. Memetic search for the equitable coloring problem. *Knowledge-Based Systems*, 188 :105000, 2020.

[5] Olawale Titiloye and Alan Crispin. Quantum annealing of the graph coloring problem. *Discrete Optimization*, 8(2) :376–384, 2011.